10 класс **Считаем уголки** 26 апреля 2018

1. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D, и вокруг треугольников ADC и BDC описаны окружности S_1 и S_2 соответственно. Касательная, проведённая к S_1 в точке D, пересекает второй раз S_2 в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что 4 полученные точки лежат на одной окружности.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. На высоте BB_1 выбрана точка D такая, что $B_1D = C_1D$. Точка M — средина BC. Докажите, что точки B, C_1, D, M лежат на одной окружности.

4. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Окружность с центром в точке I и радиусом IA пересекает стороны AB и AC, а сторону BC пересекает в точках X и Y (X находится между B и Y). Докажите, что проекции точки I на прямые AC, BC и AY лежат на одной прямой.

5. BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников BCC_1 и CBB_1, пересекает стороны AB и AC в точках X и Y. Докажите, что $AX = AY$.

6. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Внутри треугольника ABC расположена окружность ω, которая касается сторон AB и AC в точках X и Y. Пусть Z — одна из двух точек пересечения ω с описанной окружностью треугольника AIC. Докажите, что описанные окружности треугольников BXZ и CYZ касаются.

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна $180°$.

10 класс **Считаем уголки** 26 апреля 2018

1. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D, и вокруг треугольников ADC и BDC описаны окружности S_1 и S_2 соответственно. Касательная, проведённая к S_1 в точке D, пересекает второй раз S_2 в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что 4 полученные точки лежат на одной окружности.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. На высоте BB_1 выбрана точка D такая, что $B_1D = C_1D$. Точка M — средина BC. Докажите, что точки B, C_1, D, M лежат на одной окружности.

4. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Окружность с центром в точке I и радиусом IA пересекает стороны AB и AC, а сторону BC пересекает в точках X и Y (X находится между B и Y). Докажите, что проекции точки I на прямые AC, BC и AY лежат на одной прямой.

5. BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников BCC_1 и CBB_1, пересекает стороны AB и AC в точках X и Y. Докажите, что $AX = AY$.

6. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Внутри треугольника ABC расположена окружность ω, которая касается сторон AB и AC в точках X и Y. Пусть Z — одна из двух точек пересечения ω с описанной окружностью треугольника AIC. Докажите, что описанные окружности треугольников BXZ и CYZ касаются.

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна $180°$.