

1. Окружность ω касается прямой l . Две другие окружности касаются прямой l в точках A и B и окружности ω внешним образом в точках C и D . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AU = DU$.

3. На продолжениях сторон CA и AB треугольника ABC за точки A и B соответственно отложены отрезки $AE = BC$ и $BF = AC$. Окружность касается отрезка BF в точке N , стороны BC и продолжения стороны AC за точку C . Точка M — середина отрезка EF . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла A .

4. Центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на его прямой Эйлера. Докажите, что треугольник равнобедренный.

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X , что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

6. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках K и L . Касательные, проведенные к этой окружности в точках K и L , пересекаются в точке P . Докажите, что $BP \perp AC$.

7. Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

8. С центром в точке O построены большая окружность и маленькая окружность. Из точки A большой окружности проведены касательные AB и AC к маленькой (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает большую окружность в точках M и N . Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC .

1. Окружность ω касается прямой l . Две другие окружности касаются прямой l в точках A и B и окружности ω внешним образом в точках C и D . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AU = DU$.

3. На продолжениях сторон CA и AB треугольника ABC за точки A и B соответственно отложены отрезки $AE = BC$ и $BF = AC$. Окружность касается отрезка BF в точке N , стороны BC и продолжения стороны AC за точку C . Точка M — середина отрезка EF . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла A .

4. Центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на его прямой Эйлера. Докажите, что треугольник равнобедренный.

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X , что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

6. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках K и L . Касательные, проведенные к этой окружности в точках K и L , пересекаются в точке P . Докажите, что $BP \perp AC$.

7. Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

8. С центром в точке O построены большая окружность и маленькая окружность. Из точки A большой окружности проведены касательные AB и AC к маленькой (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает большую окружность в точках M и N . Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC .