10 класс | **Многочлены** | 19 апреля 2018

1. При каких a и b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2018)-Q(2018)$ кратна 2017.

3. Про приведённый многочлен $P(x)$ степени 10 известно, что $P(1)=P(10)$, $P(2)=P(9)$, …, $P(5)=P(6)$. Докажите, что график $P(x)$ имеет ось симметрии.

4. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

5. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

6. Можно ли подобрать два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами так, что $P-Q$, P и $P+Q$ — квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?

7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, …, $P(k+2018)$ будут составными.

8. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

10 класс | **Многочлены** | 19 апреля 2018

1. При каких a и b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2018)-Q(2018)$ кратна 2017.

3. Про приведённый многочлен $P(x)$ степени 10 известно, что $P(1)=P(10)$, $P(2)=P(9)$, …, $P(5)=P(6)$. Докажите, что график $P(x)$ имеет ось симметрии.

4. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

5. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

6. Можно ли подобрать два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами так, что $P-Q$, P и $P+Q$ — квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?

7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, …, $P(k+2018)$ будут составными.

8. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.