10 класс — **Производная многочлена** — 12 апреля 2018

Определение. *Производной многочлена* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ назовём многочлен $P'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Теорема. Если x_0 — точка локального максимума или минимума многочлена $P(x)$, то $P'(x_0) = 0$.

0. Верно ли утверждение, обратное утверждению теоремы?

1. У многочлена степени n имеется n различных действительных корней. Докажите, что их среднее арифметическое равно среднему арифметическому действительных корней производной многочлена.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены. Докажите, что

$$(PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Напоминание. Говорят, что x_0 является корнем многочлена $P(x)$ *кратности* k, если $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, причём $Q(x_0) \neq 0$.

3. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ имеет корень кратности $k > 1$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.

4. Докажите, что многочлен $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

5. Даны многочлены f и g степени n. Докажите, что функция

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n f^{(n)} g$$

является константой. ($g^{(k)}$ — k-ая производная многочлена g.)

6. a) Докажите, что у многочлена $P(x) = a_n x^{k_n} + a_{n-1} x^{k_{n-1}} + \ldots + a_1 x^{k_1} + a_0$ не более n положительных корней.
b) Многочлен $P(x)$ степени 2018 имеет 2018 различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

7. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий не менее n отличных от нуля коэффициентов.

10 класс — **Производная многочлена** — 12 апреля 2018

Определение. *Производной многочлена* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ назовём многочлен $P'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Теорема. Если x_0 — точка локального максимума или минимума многочлена $P(x)$, то $P'(x_0) = 0$.

0. Верно ли утверждение, обратное утверждению теоремы?

1. У многочлена степени n имеется n различных действительных корней. Докажите, что их среднее арифметическое равно среднему арифметическому действительных корней производной многочлена.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены. Докажите, что

$$(PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Напоминание. Говорят, что x_0 является корнем многочлена $P(x)$ *кратности* k, если $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, причём $Q(x_0) \neq 0$.

3. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ имеет корень кратности $k > 1$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.

4. Докажите, что многочлен $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

5. Даны многочлены f и g степени n. Докажите, что функция

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n f^{(n)} g$$

является константой. ($g^{(k)}$ — k-ая производная многочлена g.)

6. a) Докажите, что у многочлена $P(x) = a_n x^{k_n} + a_{n-1} x^{k_{n-1}} + \ldots + a_1 x^{k_1} + a_0$ не более n положительных корней.
b) Многочлен $P(x)$ степени 2018 имеет 2018 различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

7. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий не менее n отличных от нуля коэффициентов.