10 класс | Турниры | 9 апреля 2018

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется *турниром*.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

2. В турнире по волейболу в один круг приняли участие 12 команд. Две команды одержали ровно по 7 побед. Докажите, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

3. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

4. a) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
c) В турнире нет циклов. Докажите, что вершины можно занумеровать таким образом, что каждое ребро ведёт из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

5. Несколько команд провели баскетбольный турнир в один круг. Известно, что нет команды, которая бы выиграла или проиграла все матчи. Доказажите, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

6. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.

7. a) Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
b) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.
c) Для каких k существует турнир, в котором ровно k царей?

10 класс | Турниры | 9 апреля 2018

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется *турниром*.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

2. В турнире по волейболу в один круг приняли участие 12 команд. Две команды одержали ровно по 7 побед. Докажите, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

3. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

4. a) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
c) В турнире нет циклов. Докажите, что вершины можно занумеровать таким образом, что каждое ребро ведёт из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

5. Несколько команд провели баскетбольный турнир в один круг. Известно, что нет команды, которая бы выиграла или проиграла все матчи. Доказажите, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

6. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.

7. a) Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
b) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.
c) Для каких k существует турнир, в котором ровно k царей?