

Определение. *Ориентированный граф* — это граф, каждое ребро которого имеет направление.

1. По кругу записаны семь натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством.

2. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

3. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B , если из B можно долететь в A , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)

Определение. Ориентированный граф называется *сильно-связным*, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

4. а) Докажите, что в сильно-связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.

б) Докажите, что в сильно-связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n - 2$ рёбер.

с) Докажите, что для любого k , такого что $n \leq k \leq 2n - 2$ существует сильно-связный ориентированный граф с n вершинами и k рёбрами, обладающий следующим свойством: если из графа выкинуть любое ребро, то он перестанет быть сильно связным.

5. В городе одна синяя площадь и n зелёных, причём зелёные площади образуют правильный n -угольник. Каждая зелёная площадь соединена улицей с двумя соседними зелёными площадями, а синяя площадь соединена улицами со всеми зелёными. На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно проехать и с каждой — уехать. Докажите, что с каждой площади этого города можно, не нарушая правил, доехать до любой из остальных.

6. На рёбрах связного графа расставили стрелки так, что для каждой вершины количество входящих в неё стрелок равно числу выходящих из неё стрелок. Докажите, что полученный ориентированный граф является сильно-связным.

Определение. *Ориентированный граф* — это граф, каждое ребро которого имеет направление.

1. По кругу записаны семь натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством.

2. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

3. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B , если из B можно долететь в A , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)

Определение. Ориентированный граф называется *сильно-связным*, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

4. а) Докажите, что в сильно-связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.

б) Докажите, что в сильно-связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n - 2$ рёбер.

с) Докажите, что для любого k , такого что $n \leq k \leq 2n - 2$ существует сильно-связный ориентированный граф с n вершинами и k рёбрами, обладающий следующим свойством: если из графа выкинуть любое ребро, то он перестанет быть сильно связным.

5. В городе одна синяя площадь и n зелёных, причём зелёные площади образуют правильный n -угольник. Каждая зелёная площадь соединена улицей с двумя соседними зелёными площадями, а синяя площадь соединена улицами со всеми зелёными. На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно проехать и с каждой — уехать. Докажите, что с каждой площади этого города можно, не нарушая правил, доехать до любой из остальных.

6. На рёбрах связного графа расставили стрелки так, что для каждой вершины количество входящих в неё стрелок равно числу выходящих из неё стрелок. Докажите, что полученный ориентированный граф является сильно-связным.