

1. Пусть A — некоторое множество в трехмерном пространстве. Известно, что для любой точки X из множества A найдутся еще две точки Y и Z из этого же множества такие, что X — середина отрезка YZ . Докажите, что в множестве A бесконечно много точек.

2. Существуют ли такие 2018 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2017 из них не меньше квадрата оставшегося?

3. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

4. На плоскости расположено несколько треугольников, причём любые два пересекаются. Докажите, что существует прямая заданного направления, пересекающая все треугольники.

5. Докажите, что для любого натурального n число

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

не является целым.

6. Несколько точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

7. Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n .

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

1. Пусть A — некоторое множество в трехмерном пространстве. Известно, что для любой точки X из множества A найдутся еще две точки Y и Z из этого же множества такие, что X — середина отрезка YZ . Докажите, что в множестве A бесконечно много точек.

2. Существуют ли такие 2018 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2017 из них не меньше квадрата оставшегося?

3. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

4. На плоскости расположено несколько треугольников, причём любые два пересекаются. Докажите, что существует прямая заданного направления, пересекающая все треугольники.

5. Докажите, что для любого натурального n число

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

не является целым.

6. Несколько точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

7. Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n .

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.