10 класс — Линейность в геометрии — 26 февраля 2018

Определение. Скажем, что фигура (точка, отрезок, прямая и т.д.) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t каждая точка фигуры смещается на вектор $t\cdot\vec{v}$. Например, точка движется линейно, если она перемещается с постоянной скоростью по прямой.

1. Верно ли, что линейно движется
a) середина отрезка, концы которого движутся линейно;
b) прямая, две точки которой движутся линейно;
c) прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
d) точка пересечения прямых, которые движутся линейно?

2. На плоскости даны точки A и B и выходящий из точки A луч l. По l линейно движется точка C. Докажите, что у $\triangle ABC$ линейно движется
a) точка пересечения медиан; **b)** центр описанной окружности;
c) точка пересечения высот.

3. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка A_1. На отрезке A_1D как на стороне вовне построен квадрат $A_1B_1C_1D$. Прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке X.
a) Пусть точка A_1 линейно движется по отрезку CD со скоростью $\vec{v}$. Докажите, что точки B_1, C_1, X движутся линейно и найдите их скорости.
b) Докажите, что X лежит на прямой BB_1.

4. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на BD.

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

6. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X. Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.

7. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB, AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленных из точек B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.

10 класс — Линейность в геометрии — 26 февраля 2018

Определение. Скажем, что фигура (точка, отрезок, прямая и т.д.) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t каждая точка фигуры смещается на вектор $t\cdot\vec{v}$. Например, точка движется линейно, если она перемещается с постоянной скоростью по прямой.

1. Верно ли, что линейно движется
a) середина отрезка, концы которого движутся линейно;
b) прямая, две точки которой движутся линейно;
c) прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
d) точка пересечения прямых, которые движутся линейно?

2. На плоскости даны точки A и B и выходящий из точки A луч l. По l линейно движется точка C. Докажите, что у $\triangle ABC$ линейно движется
a) точка пересечения медиан; **b)** центр описанной окружности;
c) точка пересечения высот.

3. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка A_1. На отрезке A_1D как на стороне вовне построен квадрат $A_1B_1C_1D$. Прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке X.
a) Пусть точка A_1 линейно движется по отрезку CD со скоростью $\vec{v}$. Докажите, что точки B_1, C_1, X движутся линейно и найдите их скорости.
b) Докажите, что X лежит на прямой BB_1.

4. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на BD.

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

6. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X. Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.

7. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB, AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленных из точек B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.