10 класс | Теория чисел | 15 февраля 2018

1. При каких натуральных n выражение 2^n+1 является степенью (выше первой) натурального числа?

2. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a=b$.

3. Число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится на квадрат натурального числа, большего 1. Существуют ли 2018 последовательных натуральных чисел, не свободных от квадратов?

4. Существует ли 10 таких различных целых чисел, что сумма любых 9 из них является полным квадратом?

5. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

6. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых тоже почтенна.

7. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

10 класс | Теория чисел | 15 февраля 2018

1. При каких натуральных n выражение 2^n+1 является степенью (выше первой) натурального числа?

2. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a=b$.

3. Число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится на квадрат натурального числа, большего 1. Существуют ли 2018 последовательных натуральных чисел, не свободных от квадратов?

4. Существует ли 10 таких различных целых чисел, что сумма любых 9 из них является полным квадратом?

5. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

6. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых тоже почтенна.

7. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.