10 класс **Регионалка** 25 января 2018

1. Целые числа a, x_1, $x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

3. Два игрока играют в следующую игру: сначала на доске записаны числа 2, 4, …, 2018. За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не остаётся ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В компании из 2018 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека *дружат*, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовём человека *необщительным*, если у него нет друзей. Назовём человека *странным*, если он имеет в этой компании 1010 знакомых, но при этом он необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в компании?

5. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

10 класс **Регионалка** 25 января 2018

1. Целые числа a, x_1, $x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

3. Два игрока играют в следующую игру: сначала на доске записаны числа 2, 4, …, 2018. За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не остаётся ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В компании из 2018 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека *дружат*, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовём человека *необщительным*, если у него нет друзей. Назовём человека *странным*, если он имеет в этой компании 1010 знакомых, но при этом он необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в компании?

5. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?