10 класс | Теория чисел | 18 января 2018

1. Натуральные n и k ($n > k$)таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2018. Докажите, что n также оканчивается на 2018.

2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

3. Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

4. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

5. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (в левой части стоит хотя бы 2 радикала).

6. Существуют ли такие различные натуральные числа x, y, z, что $x^{10} + y^{10} = z^{11}$?

7. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 10$. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, если числа a и b уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1000000?

8. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a - b| > 10000$.

10 класс | Теория чисел | 18 января 2018

1. Натуральные n и k ($n > k$)таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2018. Докажите, что n также оканчивается на 2018.

2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

3. Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

4. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

5. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (в левой части стоит хотя бы 2 радикала).

6. Существуют ли такие различные натуральные числа x, y, z, что $x^{10} + y^{10} = z^{11}$?

7. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 10$. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, если числа a и b уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1000000?

8. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a - b| > 10000$.