10 класс — **Многочлены** — 11 января 2018

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $x+y+z-2(xy+yz+xz)+4xyz=\frac{1}{2}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

2. Уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если каждые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

5. Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочленом с целыми коэффициентами, то и число $a-b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

6. Приведенные квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x))=0$ и $g(f(x))=0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x))=0$ и $g(g(x))=0$ тоже не имеет вещественных корней.

7. Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0\leqslant k\leqslant n$, $0\leqslant l\leqslant n$, что графики многочленов $P(x)+ax^k$ и $Q(x)+bx^l$ не будут иметь общих точек.

10 класс — **Многочлены** — 11 января 2018

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $x+y+z-2(xy+yz+xz)+4xyz=\frac{1}{2}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

2. Уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если каждые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

5. Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочленом с целыми коэффициентами, то и число $a-b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

6. Приведенные квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x))=0$ и $g(f(x))=0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x))=0$ и $g(g(x))=0$ тоже не имеет вещественных корней.

7. Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0\leqslant k\leqslant n$, $0\leqslant l\leqslant n$, что графики многочленов $P(x)+ax^k$ и $Q(x)+bx^l$ не будут иметь общих точек.