

1. Олег нарисовал пустую таблицу  $50 \times 50$  и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

2. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?

3. Действительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что для любых различных простых нечётных  $p$  и  $q$  число  $x^p + y^q$  рационально. Докажите, что  $x$  и  $y$  — рациональные числа.

4. Докажите, что из арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d \neq 0$  можно выбрать подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{a}{d}$  рационально.

5. Дано  $n$  чисел,  $p$  — их произведение. Разность между  $p$  и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные  $n$  чисел иррациональны.

1. Олег нарисовал пустую таблицу  $50 \times 50$  и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

2. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?

3. Действительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что для любых различных простых нечётных  $p$  и  $q$  число  $x^p + y^q$  рационально. Докажите, что  $x$  и  $y$  — рациональные числа.

4. Докажите, что из арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d \neq 0$  можно выбрать подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{a}{d}$  рационально.

5. Дано  $n$  чисел,  $p$  — их произведение. Разность между  $p$  и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные  $n$  чисел иррациональны.