10 класс Рациональное и не очень 14 декабря 2017

Определение. Действительное число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:
a) $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

2. a) Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби, возможно, с предпериодом.
b) Докажите, что десятичная дробь конечна тогда и только тогда, когда $q = 2^m 5^n$.
c) Докажите, что если $(q, 10) = 1$, то предпериода нет.
d) Пусть $q = 2^\alpha 5^\beta q_1$. Докажите, что длины периодов дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{1}{q_1}$ равны, и оцение длину предпериода.

3. Рационально ли число $0,1234567891011121314\ldots$?

4. Существуют ли иррациональные числа a и b такие, что число a^b рациональное?

5. Существует ли такая сфера ненулевого радиуса, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты являются рациональными числами.)

6. В числе $\alpha = 0,12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

7. a) Докажите, что $\cos n\varphi$ представляется как многочлен от $\cos\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.
b) Докажите, что если $\cos\alpha^\circ = \frac{1}{3}$, то α иррационально.
c) Докажите, что если $\frac{p}{q}$ и $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ являются рациональными числами, то $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ равен одному из чисел $0, \pm1, \pm\frac{1}{2}$.
d) Выведите отсюда, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.

10 класс Рациональное и не очень 14 декабря 2017

Определение. Действительное число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:
a) $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

2. a) Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби, возможно, с предпериодом.
b) Докажите, что десятичная дробь конечна тогда и только тогда, когда $q = 2^m 5^n$.
c) Докажите, что если $(q, 10) = 1$, то предпериода нет.
d) Пусть $q = 2^\alpha 5^\beta q_1$. Докажите, что длины периодов дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{1}{q_1}$ равны, и оцение длину предпериода.

3. Рационально ли число $0,1234567891011121314\ldots$?

4. Существуют ли иррациональные числа a и b такие, что число a^b рациональное?

5. Существует ли такая сфера ненулевого радиуса, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты являются рациональными числами.)

6. В числе $\alpha = 0,12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

7. a) Докажите, что $\cos n\varphi$ представляется как многочлен от $\cos\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.
b) Докажите, что если $\cos\alpha^\circ = \frac{1}{3}$, то α иррационально.
c) Докажите, что если $\frac{p}{q}$ и $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ являются рациональными числами, то $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ равен одному из чисел $0, \pm1, \pm\frac{1}{2}$.
d) Выведите отсюда, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.