10 класс Теоремы Чевы и Менелая 2 27 ноября 2017

Дан треугольник ABC. На прямых AB, AC, BC выбраны точки A_1, B_1, C_1.

- *Теорема Чевы в синусах.* Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = 1.$$

- *Теорема Менелая в синусах.* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = -1.$$

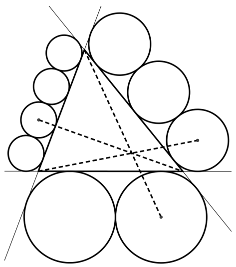
1. С помощью теоремы Чевы докажите основное свойство симедианы. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle MAC$, где M — середина стороны BC.

2. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Доказажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. В окружность вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

4. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

5. Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника так, как показано на рисунке. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и соответствующие центры окружностей.)



6. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

10 класс Теоремы Чевы и Менелая 2 27 ноября 2017

Дан треугольник ABC. На прямых AB, AC, BC выбраны точки A_1, B_1, C_1.

- *Теорема Чевы в синусах.* Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = 1.$$

- *Теорема Менелая в синусах.* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = -1.$$

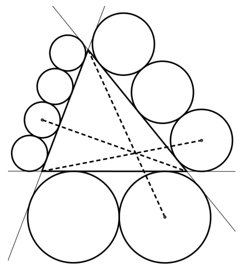
1. С помощью теоремы Чевы докажите основное свойство симедианы. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle MAC$, где M — середина стороны BC.

2. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Доказажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. В окружность вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

4. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

5. Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника так, как показано на рисунке. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и соответствующие центры окружностей.)



6. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.