10 класс **Веса** 23 ноября 2017

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). Расположение фишек называется *финальным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.
a) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что финальное состояние не зависит от порядка операций.
b) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все финальные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. На бесконечной в обе стороны полосе клеток, пронумерованной целыми числами, лежит несколько фишек. Разрешается выбрать фишки, расстояние между которыми превышает 2, и сдвинуть их одновременно навстречу друг другу на одну клетку. Докажите, что можно сделать лишь конечно число таких операций.

3. У каждого депутата парламента Муртазастана не больше 20 врагов среди депутатов. Их случайно делят на Большую и Малую палаты. Хочется, чтобы у каждого депутата Большой палаты было не больше 15 врагов в этой палате, а у каждого депутата Малой — не больше 5. Каждый день одного депутата, нарушающего это правило, перемещают в другую палату. Докажите, что этот процесс однажды завершится.

4. a) Дан правильный n-угольник. В этом многоугольнике выбрана k-я по длине диагональ. Докажите, что ее не могут пересекать в одной точке более k диагоналей.
b) Можно ли отметить внутри правильного 12-угольника 28 точек таким образом, чтобы каждая диагональ проходила через одну из выбранных точек?

5. В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше 10 платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать 10 компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

6. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

10 класс **Веса** 23 ноября 2017

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). Расположение фишек называется *финальным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.
a) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что финальное состояние не зависит от порядка операций.
b) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все финальные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. На бесконечной в обе стороны полосе клеток, пронумерованной целыми числами, лежит несколько фишек. Разрешается выбрать фишки, расстояние между которыми превышает 2, и сдвинуть их одновременно навстречу друг другу на одну клетку. Докажите, что можно сделать лишь конечно число таких операций.

3. У каждого депутата парламента Муртазастана не больше 20 врагов среди депутатов. Их случайно делят на Большую и Малую палаты. Хочется, чтобы у каждого депутата Большой палаты было не больше 15 врагов в этой палате, а у каждого депутата Малой — не больше 5. Каждый день одного депутата, нарушающего это правило, перемещают в другую палату. Докажите, что этот процесс однажды завершится.

4. a) Дан правильный n-угольник. В этом многоугольнике выбрана k-я по длине диагональ. Докажите, что ее не могут пересекать в одной точке более k диагоналей.
b) Можно ли отметить внутри правильного 12-угольника 28 точек таким образом, чтобы каждая диагональ проходила через одну из выбранных точек?

5. В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше 10 платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать 10 компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

6. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.