

Дан треугольник ABC . На прямых AB , AC , BC выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 .

- *Теорема Чевы.* Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

- *Теорема Менелая.* Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

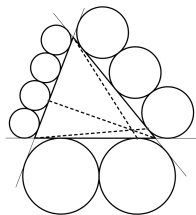
1. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы внешних углов AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

в) Дан треугольник ABC и произвольная точка P . Прямые AP и BC пересекаются в точке A_1 , BP и AC — в точке B_1 , CP и AB — в точке C_1 . Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A_2 , A_1B_1 и AB — в точке C_2 , A_1C_1 и AC — в точке B_2 . Докажите, что точки A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой.

2. Точки E и F — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что отрезок EF делит диагонали AC и BD в одном и том же отношении.

3. Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника так, как показано на рисунке. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и соответствующие точки касания.)



4. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Точки I_a , I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD , CBD . Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q . Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.

5. Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

6. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC . Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.

Дан треугольник ABC . На прямых AB , AC , BC выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 .

- *Теорема Чевы.* Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

- *Теорема Менелая.* Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

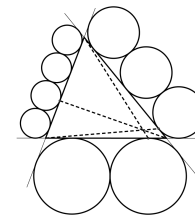
1. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы внешних углов AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

в) Дан треугольник ABC и произвольная точка P . Прямые AP и BC пересекаются в точке A_1 , BP и AC — в точке B_1 , CP и AB — в точке C_1 . Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A_2 , A_1B_1 и AB — в точке C_2 , A_1C_1 и AC — в точке B_2 . Докажите, что точки A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой.

2. Точки E и F — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что отрезок EF делит диагонали AC и BD в одном и том же отношении.

3. Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника так, как показано на рисунке. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и соответствующие точки касания.)



4. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Точки I_a , I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD , CBD . Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q . Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.

5. Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

6. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC . Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.