10 класс | **Асимптотика** | 16 ноября 2017

1. Каких чисел, не превосходящих 10^{300} больше: представимых в виде суммы куба и шестой степени или точных квадратов?

2. a) Докажите, что существует бусконечно много прямых, пересекающих параболу в двух точках.

b) Докажите, что плоскость нельзя покрыть внутренностью 1000 парабол.

3. Даны два приведенных многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что степень многочлена $P(x)$ больше степени многочлена $Q(x)$. Докажите, что существует бесконечно много точек, в которых $P(x) > Q(x)$.

4. a) Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках – кубы натуральных чисел?

b) Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах – степени двойки?

5. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй – 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.

6. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

7. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.

8. Плоскость разбита на равные многоугольники, внутри каждого из которых одна целая точка, а на границе точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна 1.

10 класс | **Асимптотика** | 16 ноября 2017

1. Каких чисел, не превосходящих 10^{300} больше: представимых в виде суммы куба и шестой степени или точных квадратов?

2. a) Докажите, что существует бусконечно много прямых, пересекающих параболу в двух точках.

b) Докажите, что плоскость нельзя покрыть внутренностью 1000 парабол.

3. Даны два приведенных многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что степень многочлена $P(x)$ больше степени многочлена $Q(x)$. Докажите, что существует бесконечно много точек, в которых $P(x) > Q(x)$.

4. a) Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках – кубы натуральных чисел?

b) Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах – степени двойки?

5. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй – 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.

6. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

7. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.

8. Плоскость разбита на равные многоугольники, внутри каждого из которых одна целая точка, а на границе точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна 1.