10 класс **Аффинные преобразования** 9 ноября 2017

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C' и D' — образы точек A, B, C и D при аффинном преобразовании.

3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, то есть для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и рационального числа λ выполнено:
a) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})' = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{b}'$;
b) $(\lambda\overrightarrow{a})' = \lambda\overrightarrow{a}'$ (на самом деле, это свойство выполнено для всех действительных λ).

4. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C'.

5. Докажите, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей многоугольников (на самом деле, утверждение верно для произвольных фигур).

---

6. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного в пересечении шести проведенных прямых, пересекаются в одной точке.

7. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, параллельные CD и AB соответственно. Докажите, что:
a) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований;
b) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

8. Прямая Гаусса. Прямые, содержащие противоположные стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

9. Докажите, что если в пятиугольнике четыре из диагоналей параллельны противоположным сторонам, то и пятая диагональ параллельна противоположной стороне.

10 класс **Аффинные преобразования** 9 ноября 2017

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C' и D' — образы точек A, B, C и D при аффинном преобразовании.

3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, то есть для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и рационального числа λ выполнено:
a) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})' = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{b}'$;
b) $(\lambda\overrightarrow{a})' = \lambda\overrightarrow{a}'$ (на самом деле, это свойство выполнено для всех действительных λ).

4. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C'.

5. Докажите, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей многоугольников (на самом деле, утверждение верно для произвольных фигур).

---

6. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного в пересечении шести проведенных прямых, пересекаются в одной точке.

7. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, параллельные CD и AB соответственно. Докажите, что:
a) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований;
b) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

8. Прямая Гаусса. Прямые, содержащие противоположные стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

9. Докажите, что если в пятиугольнике четыре из диагоналей параллельны противоположным сторонам, то и пятая диагональ параллельна противоположной стороне.