

1. Числа  $\sin 17^\circ$  и  $\sin 73^\circ$  являются корнями квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ . Докажите, что  $a^2 + 2ac = b^2$ .

2. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Алесей и Николай по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Алексей берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Николай хочет этому помешать. Сможет ли Алексей добиться своей цели?

3. Существует ли описанный 27-угольник, длины сторон которого равны 1, 2, ..., 27? (Стороны могут располагаться в произвольном порядке.)

4. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

5. Докажите, что значение выражения

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

четно при любом натуральном  $n$ .

6. Центр  $I$  вписанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  лежит на биссектрисе острого угла между высотами  $AA_1$  и  $CC_1$ . Пусть  $L$  — основание биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $I$  — центр описанной окружности треугольника  $LA_1C_1$ .

7. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов двусторонними авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов  $A, B, C, D$ , для которых есть рейсы  $AB, BC, CD$ , был и рейс  $AD$ . Сколько существует способов это сделать?

1. Числа  $\sin 17^\circ$  и  $\sin 73^\circ$  являются корнями квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ . Докажите, что  $a^2 + 2ac = b^2$ .

2. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Алесей и Николай по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Алексей берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Николай хочет этому помешать. Сможет ли Алексей добиться своей цели?

3. Существует ли описанный 27-угольник, длины сторон которого равны 1, 2, ..., 27? (Стороны могут располагаться в произвольном порядке.)

4. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

5. Докажите, что значение выражения

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

четно при любом натуральном  $n$ .

6. Центр  $I$  вписанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  лежит на биссектрисе острого угла между высотами  $AA_1$  и  $CC_1$ . Пусть  $L$  — основание биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $I$  — центр описанной окружности треугольника  $LA_1C_1$ .

7. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов двусторонними авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов  $A, B, C, D$ , для которых есть рейсы  $AB, BC, CD$ , был и рейс  $AD$ . Сколько существует способов это сделать?