10 класс | Теория чисел | 26 октября 2017

1. Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

2. Найдите все тройки натуральных чисел (p, m, n), где p — простое число, такие что $p^n + 144 = m^2$.

3. Докажите, что для любого натурального числа $k > 1$ существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы k-ой степени натурального числа и простого числа.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?

5. Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что существуют натуральные a и b такие, что среднее арифметическое всех делителей числа $n = p^a \cdot q^b$ является натуральным числом.

6. a) Найдите все такие простые p и q, что $p + q = (p - q)^3$.
b) Найдите все такие простые p, q и r, что $p + q = (p - q)^r$.

7. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

10 класс | Теория чисел | 26 октября 2017

1. Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

2. Найдите все тройки натуральных чисел (p, m, n), где p — простое число, такие что $p^n + 144 = m^2$.

3. Докажите, что для любого натурального числа $k > 1$ существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы k-ой степени натурального числа и простого числа.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?

5. Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что существуют натуральные a и b такие, что среднее арифметическое всех делителей числа $n = p^a \cdot q^b$ является натуральным числом.

6. a) Найдите все такие простые p и q, что $p + q = (p - q)^3$.
b) Найдите все такие простые p, q и r, что $p + q = (p - q)^r$.

7. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.