10 класс	Инверсия 2	16 октября 2017

Определения. *Обобщённая окружность* — это прямая или окружность. *Углом между двумя кривыми* называется наименьший из углов между касательными к этим кривым в их общей точке.

1. Докажите, что при инверсии угол между обобщенными окружностями сохраняется.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен тому же углу для треугольников ACD и BCD.

3. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются обобщённой окружности S_1 в точках B_1 и C_1, а обобщённой окружности S_2 в точках B_2 и C_2 (причём касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

4. Окружность ω_A проходит через точки A и C; окружность ω_B проходит через точки B и C; центры обеих окружностей лежат на прямой AB. Окружность ω касается окружностей ω_A и ω_B (обеих окружностей либо внешним, либо внутренним образом), а кроме того, она касается прямой AB в точке C_1. Докажите, что CC_1 — внутренняя или внешняя биссектриса треугольника ABC.

5. a) Дан треугольник ABC. Докажите, что существует инверсия с центром в точке A такая, что описанная окружность треугольника ABC перейдет в прямую, симметричную BC относительно биссектрисы угла A.
b) Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, а дуги BC, не содержащую точку A, в точке Q. Докажите, что если O лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

6. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с углом OC, а луч OB совмещается с лучем OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, проходящая через A и касающаяся ω_1 и ω_2 внешним образом, касается описанной окружности треугольника ABC.

8. В остроугольном треугольнике ABC из основания высоты AA_1 опущены перпендикуляры на прилежащие стороны. Соединяющая их прямая пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Пусть H' — точка пересечения прямой AA_1 с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что A_1 — центр вписанной окружности треугольника $PH'Q$.

10 класс	Инверсия 2	16 октября 2017

Определения. *Обобщённая окружность* — это прямая или окружность. *Углом между двумя кривыми* называется наименьший из углов между касательными к этим кривым в их общей точке.

1. Докажите, что при инверсии угол между обобщенными окружностями сохраняется.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен тому же углу для треугольников ACD и BCD.

3. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются обобщённой окружности S_1 в точках B_1 и C_1, а обобщённой окружности S_2 в точках B_2 и C_2 (причём касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

4. Окружность ω_A проходит через точки A и C; окружность ω_B проходит через точки B и C; центры обеих окружностей лежат на прямой AB. Окружность ω касается окружностей ω_A и ω_B (обеих окружностей либо внешним, либо внутренним образом), а кроме того, она касается прямой AB в точке C_1. Докажите, что CC_1 — внутренняя или внешняя биссектриса треугольника ABC.

5. a) Дан треугольник ABC. Докажите, что существует инверсия с центром в точке A такая, что описанная окружность треугольника ABC перейдет в прямую, симметричную BC относительно биссектрисы угла A.
b) Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, а дуги BC, не содержащую точку A, в точке Q. Докажите, что если O лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

6. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с углом OC, а луч OB совмещается с лучем OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, проходящая через A и касающаяся ω_1 и ω_2 внешним образом, касается описанной окружности треугольника ABC.

8. В остроугольном треугольнике ABC из основания высоты AA_1 опущены перпендикуляры на прилежащие стороны. Соединяющая их прямая пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Пусть H' — точка пересечения прямой AA_1 с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что A_1 — центр вписанной окружности треугольника $PH'Q$.