10 класс pqr-метод (он же uvw-метод) 12 октября 2017

По тройке действительных чисел a, b, c можно однозначно определить тройку чисел $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Обратное верно не всегда: по тройке действительных p, q, r не всегда можно восстановить a, b, c. Назовём тройку (p, q, r) *допустимой*, если ей соответствует тройка неотрицательных чисел a, b, c.

1. Пусть a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (возможно, комплексные). П(р)оверьте, что

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = T(p, q, r).$$

После этого докажите, что
a) Уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ имеет три действительных корня, если и только если $T(p, q, r) \geqslant 0$.
b) Следующие условия равносильны:

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ T(p, q, r) \geqslant 0.$$

2. a) Лемма об r. Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального r такого, что (p_0, q_0, r) допустима, верно, что в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных.
b) Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных.
c) Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

3. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Переписав неравенство через p, q, r, докажите, что $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8$.

4. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

5. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + 2ab} + \frac{1}{1 + 2bc} + \frac{1}{1 + 2ca} \geqslant \frac{2}{1 + abc}.$$

6. a) Пусть P — симметрический многочлен от трёх переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a, a, c) \geqslant 0$ и $P(0, b, c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a, b, c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.
b) Дан однородный симметрический многочлен $P(a, b, c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.

10 класс pqr-метод (он же uvw-метод) 12 октября 2017

По тройке действительных чисел a, b, c можно однозначно определить тройку чисел $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Обратное верно не всегда: по тройке действительных p, q, r не всегда можно восстановить a, b, c. Назовём тройку (p, q, r) *допустимой*, если ей соответствует тройка неотрицательных чисел a, b, c.

1. Пусть a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (возможно, комплексные). П(р)оверьте, что

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = T(p, q, r).$$

После этого докажите, что
a) Уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ имеет три действительных корня, если и только если $T(p, q, r) \geqslant 0$.
b) Следующие условия равносильны:

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ T(p, q, r) \geqslant 0.$$

2. a) Лемма об r. Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального r такого, что (p_0, q_0, r) допустима, верно, что в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных.
b) Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных.
c) Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

3. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Переписав неравенство через p, q, r, докажите, что $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8$.

4. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

5. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + 2ab} + \frac{1}{1 + 2bc} + \frac{1}{1 + 2ca} \geqslant \frac{2}{1 + abc}.$$

6. a) Пусть P — симметрический многочлен от трёх переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a, a, c) \geqslant 0$ и $P(0, b, c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a, b, c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.
b) Дан однородный симметрический многочлен $P(a, b, c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.