

**Определение.** *Инверсией* с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  называется преобразование, которое каждую точку  $A$ , отличную от  $O$ , переводит в точку  $A_1$  на луче  $OA$ , причем  $|OA| \cdot |OA_1| = R^2$ . Будем говорить, что точка  $O$  переходит в *бесконечно удаленную точку*, а бесконечно удаленная точка переходит в  $O$ .

**1. а)** Пусть  $AM$  и  $AN$  — касательные к окружности  $\omega$ , проведенные из точки  $A$ ,  $A_0$  — середина  $MN$ . Докажите, что точки  $A$  и  $A_0$  инверсны относительно окружности  $\omega$  (т.е.  $A$  переходит в  $A_0$  при инверсии относительно  $\omega$ ).

**б)** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Докажите, что при инверсии относительно точки  $A$  с радиусом  $AB$  дуга  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перейдет в отрезок  $BC$ .

**2.** Докажите, что при инверсии с центром в точке  $O$

**а)** прямая, проходящая через  $O$ , перейдет в себя;

**б)** окружность, проходящая через  $O$ , переходит в прямую, не проходящую через центр;

**с)** прямая, не проходящая через  $O$ , перейдет в окружность, проходящую через  $O$ ;

**д)** окружность, не проходящая через  $O$ , перейдет в окружность, не проходящую через  $O$ .

**3.** Сделаем инверсию с центром в точке касания двух окружностей. Что можно сказать про прямые, являющиеся образами этих окружностей?

**4.** Даны четыре окружности, причем первая касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, а четвертая — первой. Все касания внешние. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.

**5.** Найдите ГМТ точек касания пар окружностей, вписанных в сегмент.

**6.** Докажите, что для двух произвольных непересекающихся окружностей существует инверсия, которая переводит их в концентрические окружности.

**7. Поризм Штейнера.** Рассмотрим две непересекающиеся окружности  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_1$  лежит внутри  $S_2$ ). Для произвольной окружности  $\omega_1$ , касающейся их обеих ( $S_1$  — внешним образом,  $S_2$  — внутренним), построим цепочку касающихся окружностей по следующему правилу — для каждого  $i$  окружность  $\omega_i$  такова, что она касается  $S_1$  (внутренним образом),  $S_2$  и  $\omega_{i-1}$  (внешним образом). Пусть цепочка замкнулась за  $n$  шагов, то есть  $\omega_n$  касается  $\omega_1$ . Докажите, что тогда для любой начальной окружности  $\omega_1$  цепочка замкнется за  $n$  шагов.

**Определение.** *Инверсией* с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  называется преобразование, которое каждую точку  $A$ , отличную от  $O$ , переводит в точку  $A_1$  на луче  $OA$ , причем  $|OA| \cdot |OA_1| = R^2$ . Будем говорить, что точка  $O$  переходит в *бесконечно удаленную точку*, а бесконечно удаленная точка переходит в  $O$ .

**1. а)** Пусть  $AM$  и  $AN$  — касательные к окружности  $\omega$ , проведенные из точки  $A$ ,  $A_0$  — середина  $MN$ . Докажите, что точки  $A$  и  $A_0$  инверсны относительно окружности  $\omega$  (т.е.  $A$  переходит в  $A_0$  при инверсии относительно  $\omega$ ).

**б)** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Докажите, что при инверсии относительно точки  $A$  с радиусом  $AB$  дуга  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перейдет в отрезок  $BC$ .

**2.** Докажите, что при инверсии с центром в точке  $O$

**а)** прямая, проходящая через  $O$ , перейдет в себя;

**б)** окружность, проходящая через  $O$ , переходит в прямую, не проходящую через центр;

**с)** прямая, не проходящая через  $O$ , перейдет в окружность, проходящую через  $O$ ;

**д)** окружность, не проходящая через  $O$ , перейдет в окружность, не проходящую через  $O$ .

**3.** Сделаем инверсию с центром в точке касания двух окружностей. Что можно сказать про прямые, являющиеся образами этих окружностей?

**4.** Даны четыре окружности, причем первая касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, а четвертая — первой. Все касания внешние. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.

**5.** Найдите ГМТ точек касания пар окружностей, вписанных в сегмент.

**6.** Докажите, что для двух произвольных непересекающихся окружностей существует инверсия, которая переводит их в концентрические окружности.

**7. Поризм Штейнера.** Рассмотрим две непересекающиеся окружности  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_1$  лежит внутри  $S_2$ ). Для произвольной окружности  $\omega_1$ , касающейся их обеих ( $S_1$  — внешним образом,  $S_2$  — внутренним), построим цепочку касающихся окружностей по следующему правилу — для каждого  $i$  окружность  $\omega_i$  такова, что она касается  $S_1$  (внутренним образом),  $S_2$  и  $\omega_{i-1}$  (внешним образом). Пусть цепочка замкнулась за  $n$  шагов, то есть  $\omega_n$  касается  $\omega_1$ . Докажите, что тогда для любой начальной окружности  $\omega_1$  цепочка замкнется за  $n$  шагов.