10 класс	Геометрия	28 сентября 2017

1. В параллелограмме $CMNP$ провели биссектрисы углов MCN и PCN до пересечения с продолжениями сторон PN и MN в точках A и B соответственно. Докажите, что биссектриса угла C исходного параллелограмма перпендикулярна AB.

2. Какое наибольшее число различных прямоугольных треугольников с вершинами в узлах сетки можно одновременно вырезать из квадрата 3×3 (треугольники не должны накладываться)?

3. Общие внешние касательные непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 касаются их в точках A и B, C и D соответственно (A и B лежат на одной касательной, C и D — на другой). M — середина AB, отрезки MC и MD второй раз пересекают соответственно ω_1 и ω_2 в точках P и Q. Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности.

4. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

5. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AA_1 + BB_1 + CC_1 > P$, где P — периметр треугольника ABC.

6. a) Окружность Конвея. В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим от точки A вовне треугольника отрезки, равные BC. Концы этих отрезков обозначим A_1 и A_2. Аналогично определим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что эти шесть точек лежат на одной окружности.
b) Окружность Тэйлора. В остроугольном треугольнике ABC опустим перпендикуляры на стороны треугольника из оснований высот. Докажите, что шесть получившихся точек лежат на одной окружности.

7. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

10 класс	Геометрия	28 сентября 2017

1. В параллелограмме $CMNP$ провели биссектрисы углов MCN и PCN до пересечения с продолжениями сторон PN и MN в точках A и B соответственно. Докажите, что биссектриса угла C исходного параллелограмма перпендикулярна AB.

2. Какое наибольшее число различных прямоугольных треугольников с вершинами в узлах сетки можно одновременно вырезать из квадрата 3×3 (треугольники не должны накладываться)?

3. Общие внешние касательные непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 касаются их в точках A и B, C и D соответственно (A и B лежат на одной касательной, C и D — на другой). M — середина AB, отрезки MC и MD второй раз пересекают соответственно ω_1 и ω_2 в точках P и Q. Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности.

4. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

5. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AA_1 + BB_1 + CC_1 > P$, где P — периметр треугольника ABC.

6. a) Окружность Конвея. В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим от точки A вовне треугольника отрезки, равные BC. Концы этих отрезков обозначим A_1 и A_2. Аналогично определим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что эти шесть точек лежат на одной окружности.
b) Окружность Тэйлора. В остроугольном треугольнике ABC опустим перпендикуляры на стороны треугольника из оснований высот. Докажите, что шесть получившихся точек лежат на одной окружности.

7. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.