10 класс Симметрические многочлены 25 сентября 2017

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке переменных.

Примеры симметрических многочленов.

- $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$;
- $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$;
- *Элементарные симметрические многочлены.* $\sigma_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Основная теорема о симметрических многочленах. *Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.*

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены
a) $a^2+b^2+c^2+d^2$; **b)** $(a+b)(b+c)(c+a)$; **c)** $(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2$; **d)** $a^3+b^3+c^3+d^3$.

2. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $2a^4+2b^4+2c^4$ является квадратом целого числа.

3. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1 = x_2+x_3$, $y_2 = x_1+x_3$, $y_3 = x_1+x_2$.

4. Известно, что

$$a+b+c = x+y+z,\ a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2,\ a^3+b^3+c^3 = x^3+y^3+z^3.$$

Докажите, что $a^{2017}+b^{2017}+c^{2017} = x^{2017}+y^{2017}+z^{2017}$.

5. a) Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3+px+q=0$ (возможно, комплексные). Выразите через p и q выражение

$$D = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$$

b) Найдите необходимые и достаточные условия на коэффициенты p и q того, что уравнение $x^3+px+q=0$ имело три действительных корня (возможно, кратных).

6. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим*, если упорядоченных набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
a) Докажите, что для любого одночлена $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n)$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший член многочлена $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q
b) Докажите, что числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ из предыдущего пункта определны однозначно.
c) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

7. Многочлен $x^{2017}+y^{2017}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x+y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

10 класс Симметрические многочлены 25 сентября 2017

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке переменных.

Примеры симметрических многочленов.

- $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$;
- $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$;
- *Элементарные симметрические многочлены.* $\sigma_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Основная теорема о симметрических многочленах. *Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.*

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены
a) $a^2+b^2+c^2+d^2$; **b)** $(a+b)(b+c)(c+a)$; **c)** $(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2$; **d)** $a^3+b^3+c^3+d^3$.

2. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $2a^4+2b^4+2c^4$ является квадратом целого числа.

3. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1 = x_2+x_3$, $y_2 = x_1+x_3$, $y_3 = x_1+x_2$.

4. Известно, что

$$a+b+c = x+y+z,\ a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2,\ a^3+b^3+c^3 = x^3+y^3+z^3.$$

Докажите, что $a^{2017}+b^{2017}+c^{2017} = x^{2017}+y^{2017}+z^{2017}$.

5. a) Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3+px+q=0$ (возможно, комплексные). Выразите через p и q выражение

$$D = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$$

b) Найдите необходимые и достаточные условия на коэффициенты p и q того, что уравнение $x^3+px+q=0$ имело три действительных корня (возможно, кратных).

6. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим*, если упорядоченных набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
a) Докажите, что для любого одночлена $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n)$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший член многочлена $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q
b) Докажите, что числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ из предыдущего пункта определны однозначно.
c) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

7. Многочлен $x^{2017}+y^{2017}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x+y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.