10 класс — **Комплексные числа 2** — 21 сентября 2017

Формула Муавра. *Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.*

1. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

2. Вычислите суммы
a) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;
b) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

3. Вычислите суммы
a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$;
b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
c) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;
d) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$.

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет комплексный корень.*

Следствие. *Любой многочлен $P(x)$ единственным образом представляется в виде произведения $P(x) = a_n(x-z_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-z_s)^{\alpha_s}$, где все z_i различны.*

Напоминание. *Если многочлен с действительными коэффициентами $P(x)$ имеет комплексный корень z, то $P(\overline{z}) = 0$.*

4. a) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, степень каждого из которых не больше 2.
b) Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что существуют такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

5. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются *корнями n-ой степени из единицы*.
a) Найдите сумму и произведение этих чисел.
b) Найдите сумму квадратов этих чисел.
c) Изобразите все корни на комплексной плоскости.

6. Докажите, что многочлен $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на многочлен $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

10 класс — **Комплексные числа 2** — 21 сентября 2017

Формула Муавра. *Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.*

1. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

2. Вычислите суммы
a) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;
b) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

3. Вычислите суммы
a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$;
b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
c) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;
d) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$.

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет комплексный корень.*

Следствие. *Любой многочлен $P(x)$ единственным образом представляется в виде произведения $P(x) = a_n(x-z_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-z_s)^{\alpha_s}$, где все z_i различны.*

Напоминание. *Если многочлен с действительными коэффициентами $P(x)$ имеет комплексный корень z, то $P(\overline{z}) = 0$.*

4. a) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, степень каждого из которых не больше 2.
b) Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что существуют такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

5. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются *корнями n-ой степени из единицы*.
a) Найдите сумму и произведение этих чисел.
b) Найдите сумму квадратов этих чисел.
c) Изобразите все корни на комплексной плоскости.

6. Докажите, что многочлен $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на многочлен $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.