10 класс Комплексные числа 18 сентября 2017

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z = a + bi$, где a и b – действительные, а i – *мнимая единица*, то есть такое число, что $i^2 = -1$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Докажите, что $z_1 + z_2$, $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ и $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, если $z_2 \neq 0$.

2. Упростите выражение $\frac{(2+3i)(1-i)+(3+i)(3-i)}{1+2i}$.

Определение. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + bi$.

3. a) Докажите, что $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
b) Докажите, что $z + \overline{z}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Докажите, что если $P(z) = 0$ для некоторого комплексного z, то $P(\overline{z}) = 0$.

5. a) Докажите, что для любого комплексного числа z найдётся такое комплексное число z_1, что $z = z_1^2$. Сколько существует таких z_1?
b) Решите уравнение $z^2 - (4 + i)z + 10 + 2i = 0$.

6. Докажите, что каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Число r называется *модулем* (обозначается $|z|$) комплексного числа, а φ – аргументом. Такая форма записи называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

7. Представьте в тригонометрической форме числа 1, 2, $1+i$, $1-i\sqrt{3}$.

8. a) Докажите, что $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
b) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются) друг из друга.
c) Докажите *формулу Муавра*: $\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

10 класс Комплексные числа 18 сентября 2017

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z = a + bi$, где a и b – действительные, а i – *мнимая единица*, то есть такое число, что $i^2 = -1$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Докажите, что $z_1 + z_2$, $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ и $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, если $z_2 \neq 0$.

2. Упростите выражение $\frac{(2+3i)(1-i)+(3+i)(3-i)}{1+2i}$.

Определение. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + bi$.

3. a) Докажите, что $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
b) Докажите, что $z + \overline{z}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Докажите, что если $P(z) = 0$ для некоторого комплексного z, то $P(\overline{z}) = 0$.

5. a) Докажите, что для любого комплексного числа z найдётся такое комплексное число z_1, что $z = z_1^2$. Сколько существует таких z_1?
b) Решите уравнение $z^2 - (4 + i)z + 10 + 2i = 0$.

6. Докажите, что каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Число r называется *модулем* (обозначается $|z|$) комплексного числа, а φ – аргументом. Такая форма записи называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

7. Представьте в тригонометрической форме числа 1, 2, $1+i$, $1-i\sqrt{3}$.

8. a) Докажите, что $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
b) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются) друг из друга.
c) Докажите *формулу Муавра*: $\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.