10 класс	Лексикографический порядок	14 сентября 2017

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A мажорирует B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. Теорема. Докажите, что
(a) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы может упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется лексикограическим. Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

2. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, ..., 2017$. Если найдутся два числа рядом, при этом правое меньше левого, компьютер меняет их местами. Докажите, что в каком бы порядке мы не меняли, числа рано или поздно станут по возрастанию.

3. В бесконечной последовательности есть конечное число единиц, остальные члены равны 0. Если найдется группа 01, ее можно заменить на любую группу вида 100000000. Докажите, что удастся сделать лишь конечное число замен.

4. Компьютер сортирует массив из 2017 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

5. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

6. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p-1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

7. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

8. Петя вырезал из бумаги 2017 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.

10 класс	Лексикографический порядок	14 сентября 2017

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A мажорирует B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. Теорема. Докажите, что
(a) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы может упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется лексикограическим. Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

2. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, ..., 2017$. Если найдутся два числа рядом, при этом правое меньше левого, компьютер меняет их местами. Докажите, что в каком бы порядке мы не меняли, числа рано или поздно станут по возрастанию.

3. В бесконечной последовательности есть конечное число единиц, остальные члены равны 0. Если найдется группа 01, ее можно заменить на любую группу вида 100000000. Докажите, что удастся сделать лишь конечное число замен.

4. Компьютер сортирует массив из 2017 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

5. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

6. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p-1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

7. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

8. Петя вырезал из бумаги 2017 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.