

1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

2. В классе учатся 30 человек. Причем каждый дружит хотя бы с 15 другими. Докажите, что среди них можно выбрать четверых и посадить их за круглый стол так, что каждый сидит рядом со своими друзьями.

3. В остроугольном треугольнике ABC через центр O описанной окружности и вершины B и C проведена окружность S . Пусть OK — диаметр окружности S , D и E — соответственно точки её пересечения с прямыми AB и AC . Докажите, что $ADKE$ — параллелограмм.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , таких что сумма цифр числа 3^{n+1} не превосходит суммы цифр числа 3^n .

5. На плоскости дано 2017 красных и 2017 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 2017 попарно непересекающихся отрезков, у которых одна вершина красная, а другая синяя.

6. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях BB_1 и CC_1 его высот за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q так, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ . Докажите, что угол BFC — прямой.

7. Дана шоколадка 700×2017 . Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше или равна ширины, а второму — меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

2. В классе учатся 30 человек. Причем каждый дружит хотя бы с 15 другими. Докажите, что среди них можно выбрать четверых и посадить их за круглый стол так, что каждый сидит рядом со своими друзьями.

3. В остроугольном треугольнике ABC через центр O описанной окружности и вершины B и C проведена окружность S . Пусть OK — диаметр окружности S , D и E — соответственно точки её пересечения с прямыми AB и AC . Докажите, что $ADKE$ — параллелограмм.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , таких что сумма цифр числа 3^{n+1} не превосходит суммы цифр числа 3^n .

5. На плоскости дано 2017 красных и 2017 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 2017 попарно непересекающихся отрезков, у которых одна вершина красная, а другая синяя.

6. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях BB_1 и CC_1 его высот за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q так, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ . Докажите, что угол BFC — прямой.

7. Дана шоколадка 700×2017 . Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше или равна ширины, а второму — меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?