

1. На сборы в «Команду» приехало 100 человек, среди которых 15 преподавателей, каждый из которых знаком хотя бы с 70 приехавшими, и 85 школьников, каждый из которых знаком не более, чем с 10 приехавшими. Их всех произвольным образом расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.

2. Даны непостоянные линейные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Докажите, что хотя бы один из квадратных трёхчленов $pq + r$, $pr + q$, $qr + p$ имеет корень.

3. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ проведена биссектриса BD . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , E — точка пересечения описанной окружности треугольника CDI со стороной BC . Докажите, что точки A , D , E , B лежат на одной окружности.

4. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k можно гарантированно выбрать прямоугольник периметра k , в котором нет закрашенных клеток?

5. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени 100 таковы, что каждое из уравнений

$$P(P(x)) = Q(Q(x)), \quad P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$$

имеет больше миллиона различных корней. Обязательно ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны?

6. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC . Докажите, что основания перпендикуляров из точки P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC тогда и только тогда, когда точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A , лежат на одной прямой с точкой A .

1. На сборы в «Команду» приехало 100 человек, среди которых 15 преподавателей, каждый из которых знаком хотя бы с 70 приехавшими, и 85 школьников, каждый из которых знаком не более, чем с 10 приехавшими. Их всех произвольным образом расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.

2. Даны непостоянные линейные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Докажите, что хотя бы один из квадратных трёхчленов $pq + r$, $pr + q$, $qr + p$ имеет корень.

3. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ проведена биссектриса BD . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , E — точка пересечения описанной окружности треугольника CDI со стороной BC . Докажите, что точки A , D , E , B лежат на одной окружности.

4. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k можно гарантированно выбрать прямоугольник периметра k , в котором нет закрашенных клеток?

5. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени 100 таковы, что каждое из уравнений

$$P(P(x)) = Q(Q(x)), \quad P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$$

имеет больше миллиона различных корней. Обязательно ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны?

6. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC . Докажите, что основания перпендикуляров из точки P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC тогда и только тогда, когда точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A , лежат на одной прямой с точкой A .