10 класс Вероятностный метод в комбинаторике 17 мая 2018

1. Докажите, что в графе G, содержащем e рёбер, можно выбрать двудольный подграф, содержащий не менее $e/2$ рёбер.

2. Докажите, что рёбра полного графа на 2^n вершинах можно покрасить в красный и синий цвет, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на $2n$ вершинах.

3. В думе 1600 депутатов образовали 16000 фракций по 80 человек в каждой. Докажите, что найдутся 4 депутата, состоящие вместе хотя бы в двух фракциях.

4. Теорема Эрдёша-Ко-Радо. В n-элементном множестве выбраны несколько k-элементных подмножеств так, что любые два из них имеют общий элемент. Докажите, что если $n \geqslant 2k$, то количество этих подмножеств не превосходит C_{n-1}^{k-1}.

5. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что при всех натуральных n верно $[an] + [bn] = [cn]$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b — целое.

Определение. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Событие A называется *независимым относительно совокупности* событий B_1, $B_2, \ldots, B_n$, если для любого подмножества событий $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ выполнено $P(A \cap B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}) = P(A)P(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k})$.

Локальная лемма Ловаса. Даны события $A_1, \ldots, A_n$. Пусть $J(1), \ldots, J(n)$ — подмножества $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ такие, что событие A_i независимо относительно совокупности событий, не входящих в $J(i) \cup \{A_i\}$. Более того, нашлись числа $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ такие, что для каждого i

$$P(A_i) \leqslant x_i \prod_{k \in J(i)} (1 - x_k).$$

Тогда с вероятностью не меньше, чем $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k)$, одновременно не произойдёт ни одно из событий A_i.

6. Выведите из локальной леммы Ловаса симметричную версию.

Даны события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что каждое случается с вероятностью p и любое из них независимо с совокупностью всех, кроме некоторых d. Оказалось, что $ep(d + 1) < 1$. Докажите, что с ненулевой вероятностью одновременно не случится ни одного из событий A_i.

Подсказка: используйте неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и аналогичное неравенство для $1/e$.

7. Есть ожерелье из $11n$ бусин, бусины n цветов по 11 штук каждого цвета. Докажите, что можно выбрать n разноцветных бусин так, что никакие две выбранные бусины не стоят рядом.

8. В однокруговом теннисном турнире каждый участник одержал не менее 10 побед. Докажите, что всех участников можно разделить на две команды так, чтобы каждый участник обыграл некоторых представителей обеих команд.

9. Пусть $W(n, k)$ — наименьшее натуральное N такое, что при любой раскраске первых N натуральных чисел в n цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k. Докажите, что $W(2, k) > \frac{2^k(k-1)}{8k^2}$.

10 класс Вероятностный метод в комбинаторике 17 мая 2018

1. Докажите, что в графе G, содержащем e рёбер, можно выбрать двудольный подграф, содержащий не менее $e/2$ рёбер.

2. Докажите, что рёбра полного графа на 2^n вершинах можно покрасить в красный и синий цвет, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на $2n$ вершинах.

3. В думе 1600 депутатов образовали 16000 фракций по 80 человек в каждой. Докажите, что найдутся 4 депутата, состоящие вместе хотя бы в двух фракциях.

4. Теорема Эрдёша-Ко-Радо. В n-элементном множестве выбраны несколько k-элементных подмножеств так, что любые два из них имеют общий элемент. Докажите, что если $n \geqslant 2k$, то количество этих подмножеств не превосходит C_{n-1}^{k-1}.

5. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что при всех натуральных n верно $[an] + [bn] = [cn]$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b — целое.

Определение. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Событие A называется *независимым относительно совокупности* событий B_1, $B_2, \ldots, B_n$, если для любого подмножества событий $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ выполнено $P(A \cap B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}) = P(A)P(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k})$.

Локальная лемма Ловаса. Даны события $A_1, \ldots, A_n$. Пусть $J(1), \ldots, J(n)$ — подмножества $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ такие, что событие A_i независимо относительно совокупности событий, не входящих в $J(i) \cup \{A_i\}$. Более того, нашлись числа $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ такие, что для каждого i

$$P(A_i) \leqslant x_i \prod_{k \in J(i)} (1 - x_k).$$

Тогда с вероятностью не меньше, чем $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k)$, одновременно не произойдёт ни одно из событий A_i.

6. Выведите из локальной леммы Ловаса симметричную версию.

Даны события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что каждое случается с вероятностью p и любое из них независимо с совокупностью всех, кроме некоторых d. Оказалось, что $ep(d + 1) < 1$. Докажите, что с ненулевой вероятностью одновременно не случится ни одного из событий A_i.

Подсказка: используйте неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и аналогичное неравенство для $1/e$.

7. Есть ожерелье из $11n$ бусин, бусины n цветов по 11 штук каждого цвета. Докажите, что можно выбрать n разноцветных бусин так, что никакие две выбранные бусины не стоят рядом.

8. В однокруговом теннисном турнире каждый участник одержал не менее 10 побед. Докажите, что всех участников можно разделить на две команды так, чтобы каждый участник обыграл некоторых представителей обеих команд.

9. Пусть $W(n, k)$ — наименьшее натуральное N такое, что при любой раскраске первых N натуральных чисел в n цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k. Докажите, что $W(2, k) > \frac{2^k(k-1)}{8k^2}$.