10 класс **Вокруг одной конструкции** 14 мая 2018

1. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке X, точка A' — середина этой стороны. Докажите, что прямая $A'I$ (где I — центр вписанной окружности) делит пополам отрезок AX.

б) В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

2. Постройте треугольник, если даны одна из вершин, центр вписанной окружности и точка пересечения медиан.

3. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, AC, AB соответственно, N — точка Нагеля, L и K — соответственно ближайшая и дальняя к B точки пересечения вписанной окружности и BB_1, M — середина стороны AC.

а) Докажите, что прямая MK касается вписанной окружности.

б) Докажите, что $BL = NB_1$.

4. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_0. I_a — центр соответствующей вневписанной окружности, M — середина стороны BC. Докажите, что $AA_0 \parallel MI_a$.

б) I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей; A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0 пересекаются в одной точке.

5. а) В треугольнике ABC, в котором $AB + BC = 3AC$, вписанная окружность с центром I касается сторон AB и BC в точках D и E, соответственно. Пусть K и L симметричны точкам D и E относительно I. Докажите, что $ACKL$ — вписанный.

б) Докажите, что для такого треугольника точка Нагеля лежит на его вписанной окружности.

в) Докажите, что точки пересечения прямых AL и CK с прямой DE равноудалены от середины отрезка AC.

6. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, N — точка Нагеля.

а) Докажите, что I, M и N лежат на одной прямой.

б) Докажите, что $\overrightarrow{NH} = 2\overrightarrow{OI}$.

7. На высоте, опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC, выбрана точка K так, что $AK = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим через A_1 точку касания вписанной окружности со стороной BC, а через F — точку Фейербаха. Докажите, что $\angle KFA_1 = 90°$.

10 класс **Вокруг одной конструкции** 14 мая 2018

1. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке X, точка A' — середина этой стороны. Докажите, что прямая $A'I$ (где I — центр вписанной окружности) делит пополам отрезок AX.

б) В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

2. Постройте треугольник, если даны одна из вершин, центр вписанной окружности и точка пересечения медиан.

3. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, AC, AB соответственно, N — точка Нагеля, L и K — соответственно ближайшая и дальняя к B точки пересечения вписанной окружности и BB_1, M — середина стороны AC.

а) Докажите, что прямая MK касается вписанной окружности.

б) Докажите, что $BL = NB_1$.

4. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_0. I_a — центр соответствующей вневписанной окружности, M — середина стороны BC. Докажите, что $AA_0 \parallel MI_a$.

б) I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей; A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0 пересекаются в одной точке.

5. а) В треугольнике ABC, в котором $AB + BC = 3AC$, вписанная окружность с центром I касается сторон AB и BC в точках D и E, соответственно. Пусть K и L симметричны точкам D и E относительно I. Докажите, что $ACKL$ — вписанный.

б) Докажите, что для такого треугольника точка Нагеля лежит на его вписанной окружности.

в) Докажите, что точки пересечения прямых AL и CK с прямой DE равноудалены от середины отрезка AC.

6. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, N — точка Нагеля.

а) Докажите, что I, M и N лежат на одной прямой.

б) Докажите, что $\overrightarrow{NH} = 2\overrightarrow{OI}$.

7. На высоте, опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC, выбрана точка K так, что $AK = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим через A_1 точку касания вписанной окружности со стороной BC, а через F — точку Фейербаха. Докажите, что $\angle KFA_1 = 90°$.