10 класс | Вариации | 10 мая 2018

**1.** Сумма нескольких натуральных чисел равна 2018. Найдите их максимально возможное произведение.

**2.** На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на 2018 дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

**3.** В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, ..., p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Пусть игрок $p_i$ одержал $w_i$ побед. Найдите максимум и минимум (в зависимости от $n$) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

**4.** Рассмотрим перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$ чисел $1, 2, \ldots, 100$ (так как это перестановка, среди чисел $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{100}$ нет одинаковых). За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \ldots, 100)$ из $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$. Для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$ обозначим через $N(\sigma)$ минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки $\sigma$. Найдите максимально возможное значение $N(\sigma)$.

**5.** 49 дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат $1 \times 1$, и все участки вместе составляют квадрат $7 \times 7$. Каждый дачник враждует не более, чем с шестью другими дачниками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки враждующих дачников не были соседними по стороне.

**6.** Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

**7.** На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом $n$ из них покрашены в красный цвет, а остальные $n$ — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

**8.** В таблице $m \times n$ расставлены действительные числа так, что все суммы чисел во всех столбцах и строках — целые. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы все суммы чисел во всех столбцах и строках не изменились.

10 класс | Вариации | 10 мая 2018

**1.** Сумма нескольких натуральных чисел равна 2018. Найдите их максимально возможное произведение.

**2.** На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на 2018 дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

**3.** В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, ..., p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Пусть игрок $p_i$ одержал $w_i$ побед. Найдите максимум и минимум (в зависимости от $n$) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

**4.** Рассмотрим перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$ чисел $1, 2, \ldots, 100$ (так как это перестановка, среди чисел $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{100}$ нет одинаковых). За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \ldots, 100)$ из $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$. Для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{100})$ обозначим через $N(\sigma)$ минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки $\sigma$. Найдите максимально возможное значение $N(\sigma)$.

**5.** 49 дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат $1 \times 1$, и все участки вместе составляют квадрат $7 \times 7$. Каждый дачник враждует не более, чем с шестью другими дачниками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки враждующих дачников не были соседними по стороне.

**6.** Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

**7.** На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом $n$ из них покрашены в красный цвет, а остальные $n$ — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

**8.** В таблице $m \times n$ расставлены действительные числа так, что все суммы чисел во всех столбцах и строках — целые. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы все суммы чисел во всех столбцах и строках не изменились.