10 класс — **Многочлены** — 7 мая 2018

1. Найдите все многочлены $P(x, y)$ от двух переменных такие, что при любых x, y верно $P(x+y, y-x) = P(x, y)$.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что при любых натуральных m и n число $P(m+n)$ делится хотя бы на одно из чисел: m или n. Докажите, что $P(x)$ — тождественный ноль.

4. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число k. Оказалось, что $P(Q(x)) - x \vdots k$ при всех целых x. Докажите, что и $Q(P(x)) - x \vdots k$ при всех целых x.

5. Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся числа c и m такие, что $P(x) = c \cdot x^m$.

6. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$ включительно. Докажите, что если $k > 5$, то эти значения равны.

7. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Докажите, что $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

8. Даны приведённый многочлен $P(x)$ степени n и различные целые числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что найдётся k такое, что $|P(x_k)| > \frac{n!}{2^n}$.

9. Последовательность целых чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что при всех натуральных n и k число $a_n - a_k$ делится на $n-k$, причём существует многочлен $P(x)$ такой, что $|a_i| < P(i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ такой, что $Q(i) = a_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

10 класс — **Многочлены** — 7 мая 2018

1. Найдите все многочлены $P(x, y)$ от двух переменных такие, что при любых x, y верно $P(x+y, y-x) = P(x, y)$.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что при любых натуральных m и n число $P(m+n)$ делится хотя бы на одно из чисел: m или n. Докажите, что $P(x)$ — тождественный ноль.

4. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число k. Оказалось, что $P(Q(x)) - x \vdots k$ при всех целых x. Докажите, что и $Q(P(x)) - x \vdots k$ при всех целых x.

5. Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся числа c и m такие, что $P(x) = c \cdot x^m$.

6. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$ включительно. Докажите, что если $k > 5$, то эти значения равны.

7. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Докажите, что $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

8. Даны приведённый многочлен $P(x)$ степени n и различные целые числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что найдётся k такое, что $|P(x_k)| > \frac{n!}{2^n}$.

9. Последовательность целых чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что при всех натуральных n и k число $a_n - a_k$ делится на $n-k$, причём существует многочлен $P(x)$ такой, что $|a_i| < P(i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ такой, что $Q(i) = a_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.