10 класс **Обновлённые ТЧ гробы** 2017-2018

1. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ существует натуральное $g < p$, являющееся первообразным корнем по всем модулям p^k одновременно (для всех натуральных k).

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b$ делится на $c^2 + 1$, а $c(c^2 - c + 1)$ делится на ab. Докажите, что $a = c$ или $b = c$.

3. Найдите все простые p, для которых $p! + p$ — точный квадрат.

4. Простое p и целые числа $x_1, \ldots, x_p$ таковы, что для всех натуральных n число $x_1^n + \ldots + x_p^n$ делится на p. Докажите, что $x_1 - x_2 \,\vdots\, p$.

5. Найдите все натуральные p, для которых все числа вида $4n^2 + p$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

6. При каких натуральных n число $n^2 + 3$ делится на $\varphi(n)$?

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых все числа $ab - c$, $bc - a$, $ca - b$ являются степенями двойки.

8. Пусть p — простое число вида $4k + 3$. Докажите, что ровно одно из уравнений $x^2 - py^2 = \pm 2$ имеет решения в натуральных числах.

9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$.

10. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

11. Существует ли простое p, не представимое в виде $p = |2^n - 3^k|$ с целыми неотрицательными n и k?

12. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

13. Ваня записал на доску 4 различных взаимно простых в совокупности целых числа, по модулю больших миллиона. Серёжа записал в тетрадку 6 попарных сумм этих чисел, разбил эти 6 сумм на 3 пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все 3 произведения оказаться равными?

14. Существует ли натуральное N такое, что в любой возрастающей арифметической прогрессии из N натуральных чисел найдётся число, делящееся на простое, большее 10000?

15. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{2018}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

16. Существуют ли натуральные a и b, большие 10^{2018}, для которых число $a^8 + b^4 + 1$ делится на ab?

17. Существует ли составное $n > 10^{2018}$, для которого $3^{n-1} - 2^{n-1} \,\vdots\, n$?

10 класс **Обновлённые ТЧ гробы** 2017-2018

1. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ существует натуральное $g < p$, являющееся первообразным корнем по всем модулям p^k одновременно (для всех натуральных k).

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b$ делится на $c^2 + 1$, а $c(c^2 - c + 1)$ делится на ab. Докажите, что $a = c$ или $b = c$.

3. Найдите все простые p, для которых $p! + p$ — точный квадрат.

4. Простое p и целые числа $x_1, \ldots, x_p$ таковы, что для всех натуральных n число $x_1^n + \ldots + x_p^n$ делится на p. Докажите, что $x_1 - x_2 \,\vdots\, p$.

5. Найдите все натуральные p, для которых все числа вида $4n^2 + p$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

6. При каких натуральных n число $n^2 + 3$ делится на $\varphi(n)$?

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых все числа $ab - c$, $bc - a$, $ca - b$ являются степенями двойки.

8. Пусть p — простое число вида $4k + 3$. Докажите, что ровно одно из уравнений $x^2 - py^2 = \pm 2$ имеет решения в натуральных числах.

9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$.

10. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

11. Существует ли простое p, не представимое в виде $p = |2^n - 3^k|$ с целыми неотрицательными n и k?

12. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

13. Ваня записал на доску 4 различных взаимно простых в совокупности целых числа, по модулю больших миллиона. Серёжа записал в тетрадку 6 попарных сумм этих чисел, разбил эти 6 сумм на 3 пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все 3 произведения оказаться равными?

14. Существует ли натуральное N такое, что в любой возрастающей арифметической прогрессии из N натуральных чисел найдётся число, делящееся на простое, большее 10000?

15. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{2018}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

16. Существуют ли натуральные a и b, большие 10^{2018}, для которых число $a^8 + b^4 + 1$ делится на ab?

17. Существует ли составное $n > 10^{2018}$, для которого $3^{n-1} - 2^{n-1} \,\vdots\, n$?