

Введём несколько обозначений для элементов треугольника ABC .

- ω — вписанная окружность, I — её центр, r — её радиус, A_1, B_1, C_1 — точки её касания со сторонами;
- $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ — вневыписанные окружности, A_2, B_2, C_2 — точки их касания со сторонами;
- Ω — описанная окружность, O — её центр;
- A' и A'' — середины дуг BC , соответственно не содержащей и содержащей точку A ; B' и B'' , C' и C'' — аналогично.

Определение. *Полувыписанной* будем называть окружность S_A , касающуюся сторон AB, AC и окружности Ω (внутренним образом) в точках K, L, T_A соответственно. Аналогично определяются окружности S_B, S_C и соответствующие точки касания T_B и T_C .

1. а) Докажите, что точки T_A, K, C' (а также T_A, L, B') лежат на одной прямой.
 б) **Лемма Веррьера.** Докажите, что точки K, I, L лежат на одной прямой, причём I — середина KL .
 в) Докажите, что KL касается окружности, описанной около треугольника BIC .
2. Докажите, что радиус S_A равен $\frac{r}{\cos^2 \frac{ZA}{2}}$.
3. а) Докажите, что T_AA — симедиана треугольника $B'T_AC'$.
 б) Докажите, что T_AA'' — медиана треугольника $B'C'T_A$.
 в) Докажите, что точки T_A, I, A'' лежат на одной прямой.
4. Докажите, что CC' касается описанной окружности четырёхугольника T_AVKI .
5. а) Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в точке X , являющейся центром гомотетии с положительным коэффициентом окружностей ω и Ω .
 б) Докажите, что AA' — биссектриса угла $T_AA A_2$.
 в) Докажите, что точка, изогонально симметричная точке Нагеля, совпадает с точкой X .
6. Прямая, проходящая через вершину A , пересекает сторону BC и окружность Ω в точках E и F . Докажите, что точки T_A, A_1, E, F лежат на одной окружности.
7. Докажите, что прямая AB касается описанной окружности треугольника BA_1T_A .
8. Докажите, что прямые KL, T_AA' и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

Введём несколько обозначений для элементов треугольника ABC .

- ω — вписанная окружность, I — её центр, r — её радиус, A_1, B_1, C_1 — точки её касания со сторонами;
- $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ — вневыписанные окружности, A_2, B_2, C_2 — точки их касания со сторонами;
- Ω — описанная окружность, O — её центр;
- A' и A'' — середины дуг BC , соответственно не содержащей и содержащей точку A ; B' и B'' , C' и C'' — аналогично.

Определение. *Полувыписанной* будем называть окружность S_A , касающуюся сторон AB, AC и окружности Ω (внутренним образом) в точках K, L, T_A соответственно. Аналогично определяются окружности S_B, S_C и соответствующие точки касания T_B и T_C .

1. а) Докажите, что точки T_A, K, C' (а также T_A, L, B') лежат на одной прямой.
 б) **Лемма Веррьера.** Докажите, что точки K, I, L лежат на одной прямой, причём I — середина KL .
 в) Докажите, что KL касается окружности, описанной около треугольника BIC .
2. Докажите, что радиус S_A равен $\frac{r}{\cos^2 \frac{ZA}{2}}$.
3. а) Докажите, что T_AA — симедиана треугольника $B'T_AC'$.
 б) Докажите, что T_AA'' — медиана треугольника $B'C'T_A$.
 в) Докажите, что точки T_A, I, A'' лежат на одной прямой.
4. Докажите, что CC' касается описанной окружности четырёхугольника T_AVKI .
5. а) Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в точке X , являющейся центром гомотетии с положительным коэффициентом окружностей ω и Ω .
 б) Докажите, что AA' — биссектриса угла $T_AA A_2$.
 в) Докажите, что точка, изогонально симметричная точке Нагеля, совпадает с точкой X .
6. Прямая, проходящая через вершину A , пересекает сторону BC и окружность Ω в точках E и F . Докажите, что точки T_A, A_1, E, F лежат на одной окружности.
7. Докажите, что прямая AB касается описанной окружности треугольника BA_1T_A .
8. Докажите, что прямые KL, T_AA' и BC пересекаются в одной точке или параллельны.