

1. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$ — целое. Докажите, что оно равно 5.
2. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab .
 - а) Чему может быть равно частное?
 - б) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.
3. а) Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b, k выполнено равенство $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$, то k — точный квадрат.
 б) Для натурального m зададим последовательность $a_0 = 0$, $a_1 = m$, $a_{n+2} = m^2 a_{n+1} - a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа x и y , для которых $\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = m^2$, являются соседними членами этой последовательности.
4. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ в натуральных числах
 - а) не имеет решений при $k = 2$;
 - б) не имеет решений при $k > 3$;
 - в) имеет бесконечно много решений при $k = 1$ и $k = 3$.
5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Докажите, что $a^2 + b^2 - abc$ — точный квадрат.
6. Дано натуральное число k . Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n+1} , а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на a_n .
7. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d , большие 10^{2018} , такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$.
8. Найдите количество пар различных натуральных чисел (m, n) , меньших 100, для которых $m^2 - 1$ делится на n , а $n^2 - 1$ делится на m .
9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$.
10. Какие натуральные значения может принимать выражение $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c ?

1. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$ — целое. Докажите, что оно равно 5.
2. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab .
 - а) Чему может быть равно частное?
 - б) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.
3. а) Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b, k выполнено равенство $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$, то k — точный квадрат.
 б) Для натурального m зададим последовательность $a_0 = 0$, $a_1 = m$, $a_{n+2} = m^2 a_{n+1} - a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа x и y , для которых $\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = m^2$, являются соседними членами этой последовательности.
4. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ в натуральных числах
 - а) не имеет решений при $k = 2$;
 - б) не имеет решений при $k > 3$;
 - в) имеет бесконечно много решений при $k = 1$ и $k = 3$.
5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Докажите, что $a^2 + b^2 - abc$ — точный квадрат.
6. Дано натуральное число k . Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n+1} , а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на a_n .
7. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d , большие 10^{2018} , такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$.
8. Найдите количество пар различных натуральных чисел (m, n) , меньших 100, для которых $m^2 - 1$ делится на n , а $n^2 - 1$ делится на m .
9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$.
10. Какие натуральные значения может принимать выражение $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c ?