10 класс 1 марта 2018

1. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD ($BC < AD$). Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD, а P — точка пересечения боковых сторон. Докажите, что $\angle APO_1 = \angle DPO_2$.

2. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности ω соответственно. Пусть M — проекция точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

3. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOC и $A_0B_0C_0$, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

4. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

6. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XY, параллельная BC, и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причём расположены между прямыми BC и XY. Докажите, что общие **а)** внешние; **б)** внутренние касательные к этим окружностям пересекаются на **а)** внешней **б)** внутренней биссектрисе угла A.

10 класс 1 марта 2018

1. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD ($BC < AD$). Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD, а P — точка пересечения боковых сторон. Докажите, что $\angle APO_1 = \angle DPO_2$.

2. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности ω соответственно. Пусть M — проекция точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

3. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOC и $A_0B_0C_0$, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

4. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

6. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XY, параллельная BC, и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причём расположены между прямыми BC и XY. Докажите, что общие **а)** внешние; **б)** внутренние касательные к этим окружностям пересекаются на **а)** внешней **б)** внутренней биссектрисе угла A.