10 класс Московский разнобой 22 февраля 2018

1. На скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли 2018 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем ребенка *отважным*, если он садился между двумя детьми другого пола. В итоге все мальчики и девочки сидели на скамейке чередуясь. Сколько из них были отважными?

2. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Утром выяснилось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Обязательно ли Шпунтик из своих сможет?

3. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причем $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

4. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

5. Император пригласил 2018 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные — злые (все, кроме императора, знают, кто добрый, а кто злой). Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. Император задает каждому волшебнику (в каком угодно порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и т.д., пока не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. Можно ли раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и черный цвета так, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число черных?

7. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая). **а)** Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет. **б)** При каких N такая раскраска возможна?

10 класс Московский разнобой 22 февраля 2018

1. На скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли 2018 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем ребенка *отважным*, если он садился между двумя детьми другого пола. В итоге все мальчики и девочки сидели на скамейке чередуясь. Сколько из них были отважными?

2. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Утром выяснилось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Обязательно ли Шпунтик из своих сможет?

3. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причем $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

4. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

5. Император пригласил 2018 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные — злые (все, кроме императора, знают, кто добрый, а кто злой). Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. Император задает каждому волшебнику (в каком угодно порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и т.д., пока не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. Можно ли раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и черный цвета так, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число черных?

7. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая). **а)** Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет. **б)** При каких N такая раскраска возможна?