10 класс **Целые гауссовы числа** 12 февраля 2018

Определение 1. Комплексное число $a+bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Его *нормой* назовём число $||a+bi|| = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$. Множество целых гауссовых чисел обозначим $\mathbf{Z}[i]$.

Определение 2. Целое гауссово число u *кратно* целому гауссову числу v, если существует целое гауссово число w такое, что $u = wv$.

Определение 3. Целое гауссово число u называется *обратимым (или делителем единицы)*, если существует целое гауссово число v такое, что $uv = 1$.

Определение 4. Все гауссовы числа делятся на делители единицы, поэтому любое гауссово число, отличное от делителей единицы, имеет как минимум следующие делители: делители единицы и их произведения на само это число. Такие делители называются *тривиальными*.

Определение 5. *Простое целое гауссово число* — это ненулевое число, не имеющее других делителей, кроме тривиальных. Число, не являющееся простым, называется *составным*.

1. а) Найдите все целые гауссовы обратимые числа.

б) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, т.е. для любых $a, b \in \mathbf{Z}[i]$ $(b \neq 0)$ найдутся $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$.

в) Докажите, что любое гауссово число, отличное от делителей единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножение их на делители единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых.

2. а) Докажите, что любой делитель p числа m^2+1, где m – целое, представим в виде суммы квадратов двух чисел.

б) Докажите, что любое простое число $p = 4k+1$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. а) Докажите, что если норма целого гауссового числа z – простое натуральное число, то z является простым гауссовым.

б) Докажите, что если z является простым гауссовым, отличным от целого числа, то его норма — простое натуральное число.

в) Докажите, что если $p = 4k+3$ – простое число, то оно является простым гауссовым числом.

4. Докажите, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т.е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

5. Пусть p – целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на p?

6. Пусть $m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где все простые числа p_i различны и имеют вид $4k+1$, а все числа α_i нечётны. Докажите, что количество представлений числа m в виде $a+b$, где a и b — точные квадраты, равно $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_r+1)$.

7. Решите в целых числах уравнение **а)** $x^2+1=y^3$; **б)** $x^2+4=y^3$.

10 класс **Целые гауссовы числа** 12 февраля 2018

Определение 1. Комплексное число $a+bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Его *нормой* назовём число $||a+bi|| = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$. Множество целых гауссовых чисел обозначим $\mathbf{Z}[i]$.

Определение 2. Целое гауссово число u *кратно* целому гауссову числу v, если существует целое гауссово число w такое, что $u = wv$.

Определение 3. Целое гауссово число u называется *обратимым (или делителем единицы)*, если существует целое гауссово число v такое, что $uv = 1$.

Определение 4. Все гауссовы числа делятся на делители единицы, поэтому любое гауссово число, отличное от делителей единицы, имеет как минимум следующие делители: делители единицы и их произведения на само это число. Такие делители называются *тривиальными*.

Определение 5. *Простое целое гауссово число* — это ненулевое число, не имеющее других делителей, кроме тривиальных. Число, не являющееся простым, называется *составным*.

1. а) Найдите все целые гауссовы обратимые числа.

б) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, т.е. для любых $a, b \in \mathbf{Z}[i]$ $(b \neq 0)$ найдутся $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$.

в) Докажите, что любое гауссово число, отличное от делителей единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножение их на делители единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых.

2. а) Докажите, что любой делитель p числа m^2+1, где m – целое, представим в виде суммы квадратов двух чисел.

б) Докажите, что любое простое число $p = 4k+1$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. а) Докажите, что если норма целого гауссового числа z – простое натуральное число, то z является простым гауссовым.

б) Докажите, что если z является простым гауссовым, отличным от целого числа, то его норма — простое натуральное число.

в) Докажите, что если $p = 4k+3$ – простое число, то оно является простым гауссовым числом.

4. Докажите, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т.е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

5. Пусть p – целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на p?

6. Пусть $m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где все простые числа p_i различны и имеют вид $4k+1$, а все числа α_i нечётны. Докажите, что количество представлений числа m в виде $a+b$, где a и b — точные квадраты, равно $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_r+1)$.

7. Решите в целых числах уравнение **а)** $x^2+1=y^3$; **б)** $x^2+4=y^3$.