

1. Пусть  $\omega$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается отрезка  $BC$  в точке  $P$ , и дуги  $BC$  окружности  $\omega$ , не содержащей точки  $A$ , в точке  $Q$ . Докажите, что если  $\angle BAO = \angle CAO$ , то  $\angle PAO = \angle QAO$ .

2. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $\angle AOE = \angle DOF$ .

3. Окружность  $\gamma$  вписана в угол  $B$  треугольника  $ABC$  и касается его описанной окружности внутренним образом в точке  $P$ . Обозначим ее точки касания со сторонами  $AB$  и  $BC$  через  $X$  и  $Y$ ;  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Пусть также внеписанная в угол  $B$  окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $AC$  в точке  $Q$ .

а) Докажите, что  $\angle ABP = \angle CBQ$ .

б) Докажите, что  $I$  лежит на прямой  $XY$ .

в) Докажите, что точки, изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля, являются соответственно центрами отрицательной и положительной гомотетий, переводящих вписанную окружность в описанную окружность.

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .

5. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  являются хордами касающихся окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Градусные меры касающихся дуг  $AB$  и  $CD$  равны соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $\omega_3$  и  $\omega_4$  — также окружности с хордами  $AB$  и  $CD$  соответственно, но градусные меры аналогичных дуг  $AB$  и  $CD$  равны соответственно  $\beta$  и  $\alpha$ . Докажите, что  $\omega_3$  и  $\omega_4$  тоже касаются.

6. В углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  вписаны непересекающиеся окружности  $\omega$  и  $\gamma$  с центрами  $P$  и  $Q$ . Оказалось, что  $\angle BAQ = \angle CAP$ . Докажите, что окружность, касающаяся  $\gamma$  и  $\omega$  внешним образом и проходящая через  $A$ , касается и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

7. Пусть  $M$  и  $N$  — соответственно середины большой и маленькой дуги  $BC$  описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Из вершины  $B$  проведена высота  $BH$ . Точка  $K$  на прямой  $AN$  выбрана таким образом, что  $\angle KHM = 90^\circ$ . Докажите, что  $BN = BK$ .

8. Докажите, что композиция трёх преобразований типа "инверсия+симметрия", применённых последовательно к трём вершинам треугольника, есть тождественное преобразование.

1. Пусть  $\omega$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается отрезка  $BC$  в точке  $P$ , и дуги  $BC$  окружности  $\omega$ , не содержащей точки  $A$ , в точке  $Q$ . Докажите, что если  $\angle BAO = \angle CAO$ , то  $\angle PAO = \angle QAO$ .

2. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $\angle AOE = \angle DOF$ .

3. Окружность  $\gamma$  вписана в угол  $B$  треугольника  $ABC$  и касается его описанной окружности внутренним образом в точке  $P$ . Обозначим ее точки касания со сторонами  $AB$  и  $BC$  через  $X$  и  $Y$ ;  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Пусть также внеписанная в угол  $B$  окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $AC$  в точке  $Q$ .

а) Докажите, что  $\angle ABP = \angle CBQ$ .

б) Докажите, что  $I$  лежит на прямой  $XY$ .

в) Докажите, что точки, изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля, являются соответственно центрами отрицательной и положительной гомотетий, переводящих вписанную окружность в описанную окружность.

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .

5. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  являются хордами касающихся окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Градусные меры касающихся дуг  $AB$  и  $CD$  равны соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $\omega_3$  и  $\omega_4$  — также окружности с хордами  $AB$  и  $CD$  соответственно, но градусные меры аналогичных дуг  $AB$  и  $CD$  равны соответственно  $\beta$  и  $\alpha$ . Докажите, что  $\omega_3$  и  $\omega_4$  тоже касаются.

6. В углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  вписаны непересекающиеся окружности  $\omega$  и  $\gamma$  с центрами  $P$  и  $Q$ . Оказалось, что  $\angle BAQ = \angle CAP$ . Докажите, что окружность, касающаяся  $\gamma$  и  $\omega$  внешним образом и проходящая через  $A$ , касается и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

7. Пусть  $M$  и  $N$  — соответственно середины большой и маленькой дуги  $BC$  описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Из вершины  $B$  проведена высота  $BH$ . Точка  $K$  на прямой  $AN$  выбрана таким образом, что  $\angle KHM = 90^\circ$ . Докажите, что  $BN = BK$ .

8. Докажите, что композиция трёх преобразований типа "инверсия+симметрия", применённых последовательно к трём вершинам треугольника, есть тождественное преобразование.