10 класс **Производная в неравенствах** 5 февраля 2018

Факт. Дифференцируемая функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ при всех $x\in[a,b]$.

Следствие. Если $f(a)\geqslant g(a)$ и $f'(x)>g'(x)$ при всех $x>a$, то верно $f(x)>g(x)$ при всех $x>a$.

Упражнение. Докажите, что любой многочлен до какого-то момента и с какого-то момента монотонен.

1. Пусть $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9+9x^8\leqslant 9x^{10}+2$.

2. Пусть $x\neq 0$. Докажите, что $e^x>1+x$.

3. Пусть $a,b\geqslant 0$. Докажите, что $3a^3+7b^3\geqslant 9ab^2$.

4. Пусть $\alpha>1$, $x>-1$. Докажите, что $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$.

5. Сколько корней может быть у уравнения $e^x=ax^2+bx+c$?

6. Для различных положительных чисел a и b рассмотрим их *среднее логарифмическое* $\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$. Докажите, что среднее логарифмическое находится между средним геометрическим и средним арифметическим чисел a и b.

7. Пусть $x>0$. Докажите, что $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ и $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

8. Пусть $x\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^{2n}}{2n}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Для острых углов $\alpha<\beta$ докажите, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

10. Сравните числа **а)** $\log_2 3$ и $\log_3 4$; **б)** $\cos 1$ и $1+\cos 2$; **в)** e^π и π^e.

11. Пусть α,β,γ — углы треугольника. Какие значения может принимать **а)** $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$; **б)** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$?

12. а) Неравенство Юнга. Пусть $a,b\geqslant 0$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажите, что

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

б) Неравенство Гёльдера. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\geqslant 0$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

в) Неравенство Минковского. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\geqslant 0$ и $p>1$. Докажите, что

$$\big((a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}}\leqslant(a_1^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+\ldots+b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

10 класс **Производная в неравенствах** 5 февраля 2018

Факт. Дифференцируемая функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ при всех $x\in[a,b]$.

Следствие. Если $f(a)\geqslant g(a)$ и $f'(x)>g'(x)$ при всех $x>a$, то верно $f(x)>g(x)$ при всех $x>a$.

Упражнение. Докажите, что любой многочлен до какого-то момента и с какого-то момента монотонен.

1. Пусть $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9+9x^8\leqslant 9x^{10}+2$.

2. Пусть $x\neq 0$. Докажите, что $e^x>1+x$.

3. Пусть $a,b\geqslant 0$. Докажите, что $3a^3+7b^3\geqslant 9ab^2$.

4. Пусть $\alpha>1$, $x>-1$. Докажите, что $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$.

5. Сколько корней может быть у уравнения $e^x=ax^2+bx+c$?

6. Для различных положительных чисел a и b рассмотрим их *среднее логарифмическое* $\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$. Докажите, что среднее логарифмическое находится между средним геометрическим и средним арифметическим чисел a и b.

7. Пусть $x>0$. Докажите, что $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ и $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

8. Пусть $x\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^{2n}}{2n}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Для острых углов $\alpha<\beta$ докажите, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

10. Сравните числа **а)** $\log_2 3$ и $\log_3 4$; **б)** $\cos 1$ и $1+\cos 2$; **в)** e^π и π^e.

11. Пусть α,β,γ — углы треугольника. Какие значения может принимать **а)** $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$; **б)** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$?

12. а) Неравенство Юнга. Пусть $a,b\geqslant 0$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажите, что

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

б) Неравенство Гёльдера. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\geqslant 0$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

в) Неравенство Минковского. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\geqslant 0$ и $p>1$. Докажите, что

$$\big((a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}}\leqslant(a_1^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+\ldots+b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$