10 класс | Теория вероятностей 2 | 22 января 2018

1. Игра в "супершахматы"ведётся на доске размером 100×100, в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

Решение.

Занумеруем все фигуры от 1 до 20. Выберем из них две случайные с номерами i и j. Заметим, что i-я фигура бьет j-ю с вероятностью $\frac{20}{10^4}$. Обозначим I_{ij} - индикатор события, что i-я фигура бьет j-ю. Тогда если ξ - случайная величина, которая обозначает число пар фигур, в которых кто-то кого-то бьет, то

$$E\xi = \sum_{i,j} EI_{ij} = \sum_{ij} \frac{20}{10^4} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 20}{10^4} < 1$$

Таким образом, существует некоторая расстановка фигур, при которой никто никого не бьет.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Решение.

Пусть Ω — множество всех расстановок стрелок. Для каждого способа $\sigma \in S_n$ упорядочить вершины заведём событие A_σ, состоящее в том, что вершины в порядке σ образуют гамильтонов путь. Легко видеть, что $P(A_\sigma) = 2^{1-n}$, так как $n-1$ рёбер внутри пути σ должны быть ориентированы в правильную сторону, а как ориентированы все остальные рёбра нас не волнует. Пусть $\xi(\omega)$— число гамильтоновых путей в графе ω. Для каждой расстановки стрелок ω выполнено равенство

$$\xi(\omega) = \sum_{\sigma \in S_n} I_{A_\sigma}(\omega)$$

что нам возможность посчитать

$$E\xi = \sum_{\sigma \in S_n} EI_{A_\sigma}(\omega) = n!2^{1-n}$$

По условию надо доказать существование такого графа ω, что $\xi(\omega) > E\xi$. Для этого достаточно найти хотя бы один граф ω , что $\xi(\omega) < E\xi$ (если функция в какой-то точке меньше среднего, то в какой-то другой точке она больше среднего). В качестве ω подойдёт граф на числах $1, 2, ..., n$, где $i \to j$ если $i < j$.

3. Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом, так чтобы все 100! вариантов рассадки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято) и так далее. Найдите математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в это число).

Решение.

Будем решать задачу в общем случае, если всего пассажиров n. Пусть E_n – искомое математическое ожидание числа потревоженных пассажиров. Тогда очевидно, что $E_0 = 0$ и

$$E_n = P(n\text{-й пассажир сел не на свое место})(1 + E_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(1 + E_{n-1})$$

Докажем по индукции, что $E_n = \frac{n-1}{2}$.
Действительно, в база очевидна, для доказательства перехода несложно понять, что

$$\frac{n-1}{2}(1+\frac{n-2}{2}) = \frac{n-1}{2}$$

4. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее чем с 30% населения. Докажите, что существует пара жителей, которые в объединении знают не менее половины населения.
Решение.
Ребрами будем обозначать незнакомства, всего вершин n(в частности, каждая вершина соединена ребром с самой собой!). По условию $\mathrm{deg} v_s \le 0.7n$; доказать надо, что пересечение соседей каких-то двух вершин составляет не больше $0.5n$. Выберем случайную упорядоченную пару вершин (возможно, совпадающих) и посчитаем количество ξ их общих соседей. Пусть ξ_s – индикатор того, что вершина v_s оказалась общим соседом двух выбранных. Тогда можно записать равенства

$$E\xi = \sum_{s=1}^{n} E\xi_s = \sum_{i=1}^{n} (degv_s)^2/n^2 \le 0.5n$$

Получаем, что существует «хорошая» пара вершин.

5. Аналитики в компании "Много денег" раз в 15 дней умеют предсказывать, что в течении следующих 15 дней биткоин 7 раз вырастет на $x_1, x_2, .., x_7$ процентов и 8 раз упадет на $y_1, y_2, ..., y_8$ процентов(каждый раз $x_1, ..., x_7$ и $y_1, ..., y_8$ могут быть разными). Однако аналитики не умеют предсказывать в какой день произойдет скачок цен, поэтому считается, что все 15! вариантов изменения цен равновероятны. Пара дней называется прибыльной, если биткоин в первый день упал, а во второй вырос (или наоборот). За 15 дней компания "Много денег" зарабатывает столько биткоинов, сколько было удачных дней плюс платит за прогноз аналитикам 7.5 биткоинов. Докажите, что сколько много бы денег не было у компании "Много денег", она в конечном счете обанкротится.
Решение.
Обозначим X_n, $n = 2, 3, .., 15$ - индикатор события, что n-й день удачный. Тогда несложно видеть, что

$$EX_n = P(X_n = 1) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 13!}{15!} = \frac{8}{15}$$

Таким образом, математическое ожидание числа удачных дней равно $\frac{8 \cdot 14}{15} = \frac{112}{15} < 7.5$, значит, в какой-то момент компания обанкротится.

6. На экзамене по теории вероятностей всего n билетов. Вася знает только k из них. Преподаватель запускает студентов по одному и дает случайным образом один из n билетов. Известно, что количество людей в классе меньше n и преподаватель не дает никаким двум студентам одинаковых билетов. Каким в очереди надо стать Васе, чтобы с наибольшей вероятностью ему достался знакомый ему билет?
Решение.
Докажем, что вероятность получения нужного билета не зависит от номера в очереди и равна $\frac{k}{n}$ по индукции по n.
База $n = k$. Тогда студент знает все билеты, значит, в любой момент он с вероятностью 1 вытащит знакомый ему билет.
Переход от n к $n+1$. Если студент стоит первым в очереди, то искомая вероятность равна $\frac{k}{n}$. Если он стоит не первым, то вероятность вытащить знакомый билет по по предположению индукции равна

$$P(\text{студент вытащит нужный билет}) = P(\text{первый в очереди вытащит знакомый студенту билет}) \cdot \frac{k-1}{n-1} +$$

$$+P(\text{первый в очереди вытащит незнакомый студенту билет}) \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-k)k}{n(n-1)} = \frac{k}{n}$$

Что и требовалось доказать.

7. На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты?

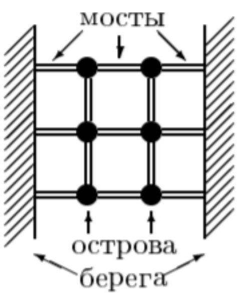
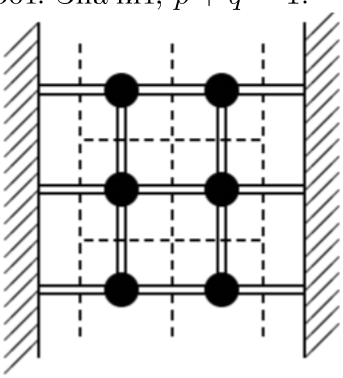


Рисунок 1

Решение.
Предположим, что у нас в добавок имеется кораблик, который может проплывать под мостом, только если он разрушен. Возможные пути, по которым может проплыть корабль представлены пунктиром на рисунке ниже. Тогда понятно, что

$$p = P(\text{человек сможет перейти с берега на берег}) = P(\text{корабль проплывет под мостами}) = q$$

Однако, очевидно, что либо человек сможет перейти с берега на берег, а корабль не сможет проплыть, либо наоборот. Значит, $p + q = 1$.



10 класс	Теория вероятностей 2	22 января 2018

1. Игра в "супершахматы"ведётся на доске размером 100×100, в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

Решение.

Занумеруем все фигуры от 1 до 20. Выберем из них две случайные с номерами i и j. Заметим, что i-я фигура бьет j-ю с вероятностью $\frac{20}{10^4}$. Обозначим I_{ij} - индикатор события, что i-я фигура бьет j-ю. Тогда если ξ - случайная величина, которая обозначает число пар фигур, в которых кто-то кого-то бьет, то

$$E\xi = \sum_{i,j} EI_{ij} = \sum_{ij} \frac{20}{10^4} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 20}{10^4} < 1$$

Таким образом, существует некоторая расстановка фигур, при которой никто никого не бьет.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Решение.

Пусть Ω — множество всех расстановок стрелок. Для каждого способа $\sigma \in S_n$ упорядочить вершины заведём событие A_σ, состоящее в том, что вершины в порядке σ образуют гамильтонов путь. Легко видеть, что $P(A_\sigma) = 2^{1-n}$, так как $n-1$ рёбер внутри пути σ должны быть ориентированы в правильную сторону, а как ориентированы все остальные рёбра нас не волнует. Пусть $\xi(\omega)$— число гамильтоновых путей в графе ω. Для каждой расстановки стрелок ω выполнено равенство

$$\xi(\omega) = \sum_{\sigma \in S_n} I_{A_\sigma}(\omega)$$

что нам возможность посчитать

$$E\xi = \sum_{\sigma \in S_n} EI_{A_\sigma}(\omega) = n!2^{1-n}$$

По условию надо доказать существование такого графа ω, что $\xi(\omega) > E\xi$. Для этого достаточно найти хотя бы один граф ω , что $\xi(\omega) < E\xi$ (если функция в какой-то точке меньше среднего, то в какой-то другой точке она больше среднего). В качестве ω подойдёт граф на числах $1, 2, ..., n$, где $i \to j$ если $i < j$.

3. Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом, так чтобы все 100! вариантов рассадки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято) и так далее. Найдите математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в это число).

Решение.

Будем решать задачу в общем случае, если всего пассажиров n. Пусть E_n – искомое математическое ожидание числа потревоженных пассажиров. Тогда очевидно, что $E_0 = 0$ и

$$E_n = P(n\text{-й пассажир сел не на свое место})(1 + E_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(1 + E_{n-1})$$

Докажем по индукции, что $E_n = \frac{n-1}{2}$.
Действительно, в база очевидна, для доказательства перехода несложно понять, что

$$\frac{n-1}{2}(1+\frac{n-2}{2}) = \frac{n-1}{2}$$

4. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее чем с 30% населения. Докажите, что существует пара жителей, которые в объединении знают не менее половины населения.
Решение.
Ребрами будем обозначать незнакомства, всего вершин n(в частности, каждая вершина соединена ребром с самой собой!). По условию $\deg v_s \le 0.7n$; доказать надо, что пересечение соседей каких-то двух вершин составляет не больше $0.5n$. Выберем случайную упорядоченную пару вершин (возможно, совпадающих) и посчитаем количество ξ их общих соседей. Пусть ξ_s – индикатор того, что вершина v_s оказалась общим соседом двух выбранных. Тогда можно записать равенства

$$E\xi = \sum_{s=1}^{n} E\xi_s = \sum_{i=1}^{n}(degv_s)^2/n^2 \le 0.5n$$

Получаем, что существует «хорошая» пара вершин.

5. Аналитики в компании "Много денег" раз в 15 дней умеют предсказывать, что в течении следующих 15 дней биткоин 7 раз вырастет на $x_1, x_2, .., x_7$ процентов и 8 раз упадет на $y_1, y_2, ..., y_8$ процентов(каждый раз $x_1, ..., x_7$ и $y_1, ..., y_8$ могут быть разными). Однако аналитики не умеют предсказывать в какой день произойдет скачок цен, поэтому считается, что все 15! вариантов изменения цен равновероятны. Пара дней называется прибыльной, если биткоин в первый день упал, а во второй вырос (или наоборот). За 15 дней компания "Много денег" зарабатывает столько биткоинов, сколько было удачных дней плюс платит за прогноз аналитикам 7.5 биткоинов. Докажите, что сколько много бы денег не было у компании "Много денег", она в конечном счете обанкротится.
Решение.
Обозначим X_n, $n = 2, 3, .., 15$ - индикатор события, что n-й день удачный. Тогда несложно видеть, что

$$EX_n = P(X_n = 1) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 13!}{15!} = \frac{8}{15}$$

Таким образом, математическое ожидание числа удачных дней равно $\frac{8 \cdot 14}{15} = \frac{112}{15} < 7.5$, значит, в какой-то момент компания обанкротится.

6. На экзамене по теории вероятностей всего n билетов. Вася знает только k из них. Преподаватель запускает студентов по одному и дает случайным образом один из n билетов. Известно, что количество людей в классе меньше n и преподаватель не дает никаким двум студентам одинаковых билетов. Каким в очереди надо стать Васе, чтобы с наибольшей вероятностью ему достался знакомый ему билет?
Решение.
Докажем, что вероятность получения нужного билета не зависит от номера в очереди и равна $\frac{k}{n}$ по индукции по n.
База $n = k$. Тогда студент знает все билеты, значит, в любой момент он с вероятностью 1 вытащит знакомый ему билет.
Переход от n к $n+1$. Если студент стоит первым в очереди, то искомая вероятность равна $\frac{k}{n}$. Если он стоит не первым, то вероятность вытащить знакомый билет по по предположению индукции равна

$$P(\text{студент вытащит нужный билет}) = P(\text{первый в очереди вытащит знакомый студенту билет}) \cdot \frac{k-1}{n-1} +$$
$$+P(\text{первый в очереди вытащит незнакомый студенту билет}) \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-k)k}{n(n-1)} = \frac{k}{n}$$

Что и требовалось доказать.

7. На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты?

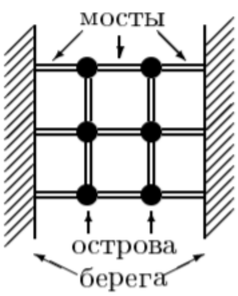


Рисунок 1

Решение.
Предположим, что у нас в добавок имеется кораблик, который может проплывать под мостом, только если он разрушен. Возможные пути, по которым может проплыть корабль представлены пунктиром на рисунке ниже. Тогда понятно, что

$$p = P(\text{человек сможет перейти с берега на берег}) = P(\text{корабль проплывет под мостами}) = q$$

Однако, очевидно, что либо человек сможет перейти с берега на берег, а корабль не сможет проплыть, либо наоборот. Значит, $p + q = 1$.