10 класс | Теория вероятностей — 2 | 22 января 2018

1. Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100×100, в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру A передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом так, чтобы все 100! вариантов рассадки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято) и так далее. Найдите математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в это число).

4. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее, чем с 30% населения. Докажите, что существует пара жителей, которые в объединении знают не менее половины населения.

5. Аналитики в компании "Много денег" раз в 15 дней умеют предсказывать, что в течении следующих 15 дней биткоин 7 раз вырастет на $x_1, x_2, .., x_7$ процентов и 8 раз упадет на $y_1, y_2, ..., y_8$ процентов (каждый раз $x_1, ..., x_7$ и $y_1, ..., y_8$ могут быть разными). Однако аналитики не умеют предсказывать, в какой день произойдет скачок цен, поэтому считается, что все 15! вариантов изменения цен равновероятны. Пара дней называется прибыльной, если биткоин в первый день упал, а во второй вырос (или наоборот). За 15 дней компания "Много денег" зарабатывает столько биткоинов, сколько было удачных дней плюс платит за прогноз аналитикам 7.5 биткоинов. Докажите, что сколько много бы денег не было у компании "Много денег", она в конечном счете обанкротится.

6. На экзамене по теории вероятностей всего n билетов. Вася знает только k из них. Преподаватель запускает студентов по одному и дает случайным образом один из n билетов. Известно, что количество людей в классе меньше n и преподаватель не дает никаким двум студентам одинаковых билетов. Каким в очереди надо встать Васе, чтобы с наибольшей вероятностью ему достался знакомый билет?

7. На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты?

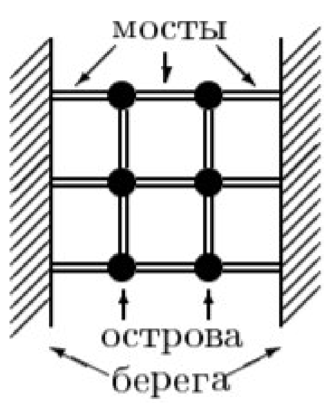

Рисунок 1