

1. а) Пусть прямая  $l$  касается эллипса с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P$ . Докажите, что  $l$  — внешняя биссектриса угла  $F_1PF_2$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичные свойства для параболы и гиперболы.

2. Пусть  $XU$  — хорда эллипса, проходящая через его фокус  $F_1$ . Докажите, что  $F_1$  — точка касания вневписанной окружности треугольника  $XUF_2$  со стороной  $XU$ .

3. Докажите, что геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом (т. е. проведённые к нему из этой точки касательные перпендикулярны), является окружность с центром в центре эллипса.

4. Пусть на эллипс  $\alpha$  накинута нить, которую натянули с помощью карандаша. Докажите, что карандаш при вращении вокруг эллипса опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом  $\alpha$ .

5. Дан эллипс с фокусами  $F_1, F_2$  и точка  $X$  вне этого эллипса. Из неё проведены касательные  $XP$  и  $XQ$  к этому эллипсу. Докажите, что  $\angle PXF_1 = \angle QXF_2$ .

6. а) Из фокуса  $F$  эллипса  $\alpha$  опущены перпендикуляры  $FN$  на всевозможные касательные к  $\alpha$ . Докажите, что ГМТ  $N$  — это окружность.

б) Для касательной  $l$  к  $\alpha$  выберем на ней точку  $M$  такую, что  $\angle(l, MF) = \beta = \text{const}$ . Докажите, что ГМТ  $M$  по всем возможным касательным  $l$  — это окружность.

в) Докажите, что если  $\beta < \beta_0$ , то эта окружность касается эллипса в двух точках; если  $\beta = \beta_0$ , то касается в одной точке; а если  $\beta > \beta_0$ , то не касается. Чему равно  $\beta_0$ ?

7. а) Дан треугольник  $ABC$  и точки  $A_1, B_1, C_1$  на его сторонах  $BC, AC, AB$  соответственно такие, что прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что существует единственная коника, касающаяся сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

б) Докажите, что фокусы любой такой коники изогонально сопряжены. Докажите и обратное: если даны две изогонально сопряжённые точки, то существует единственная коника с фокусами в этих точках, касающаяся сторон треугольника.

в) Докажите, что фокус параболы, вписанной в треугольник, лежит на её описанной окружности.

8. Пусть прямая пересекает гиперболу в точках  $A$  и  $B$ , а её асимптоты — в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $AX = BY$ .

9. Назовём *эллипсоидом вращения* поверхность, получающуюся вращением эллипса относительно его большей оси. *Фокусами* эллипсоида вращения называются фокусы исходного эллипса. Докажите, что пересечение двух эллипсоидов вращения с общим фокусом лежит в одной плоскости.

1. а) Пусть прямая  $l$  касается эллипса с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P$ . Докажите, что  $l$  — внешняя биссектриса угла  $F_1PF_2$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичные свойства для параболы и гиперболы.

2. Пусть  $XU$  — хорда эллипса, проходящая через его фокус  $F_1$ . Докажите, что  $F_1$  — точка касания вневписанной окружности треугольника  $XUF_2$  со стороной  $XU$ .

3. Докажите, что геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом (т. е. проведённые к нему из этой точки касательные перпендикулярны), является окружность с центром в центре эллипса.

4. Пусть на эллипс  $\alpha$  накинута нить, которую натянули с помощью карандаша. Докажите, что карандаш при вращении вокруг эллипса опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом  $\alpha$ .

5. Дан эллипс с фокусами  $F_1, F_2$  и точка  $X$  вне этого эллипса. Из неё проведены касательные  $XP$  и  $XQ$  к этому эллипсу. Докажите, что  $\angle PXF_1 = \angle QXF_2$ .

6. а) Из фокуса  $F$  эллипса  $\alpha$  опущены перпендикуляры  $FN$  на всевозможные касательные к  $\alpha$ . Докажите, что ГМТ  $N$  — это окружность.

б) Для касательной  $l$  к  $\alpha$  выберем на ней точку  $M$  такую, что  $\angle(l, MF) = \beta = \text{const}$ . Докажите, что ГМТ  $M$  по всем возможным касательным  $l$  — это окружность.

в) Докажите, что если  $\beta < \beta_0$ , то эта окружность касается эллипса в двух точках; если  $\beta = \beta_0$ , то касается в одной точке; а если  $\beta > \beta_0$ , то не касается. Чему равно  $\beta_0$ ?

7. а) Дан треугольник  $ABC$  и точки  $A_1, B_1, C_1$  на его сторонах  $BC, AC, AB$  соответственно такие, что прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что существует единственная коника, касающаяся сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

б) Докажите, что фокусы любой такой коники изогонально сопряжены. Докажите и обратное: если даны две изогонально сопряжённые точки, то существует единственная коника с фокусами в этих точках, касающаяся сторон треугольника.

в) Докажите, что фокус параболы, вписанной в треугольник, лежит на её описанной окружности.

8. Пусть прямая пересекает гиперболу в точках  $A$  и  $B$ , а её асимптоты — в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $AX = BY$ .

9. Назовём *эллипсоидом вращения* поверхность, получающуюся вращением эллипса относительно его большей оси. *Фокусами* эллипсоида вращения называются фокусы исходного эллипса. Докажите, что пересечение двух эллипсоидов вращения с общим фокусом лежит в одной плоскости.