10 класс — *pqr*-метод — 14 декабря 2017

Пусть нам задан многочлен с действительными коэффициентами x^3-px^2+qx-r. Тогда его корни a,b,c (такие числа, что $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$) являются вещественными тогда и только тогда, когда дискриминант многочлена третьей степени $T(p,q,r)$ не меньше нуля. Дискриминант при этом выражается в явном виде, как

$$T(p,q,r)=-27r^2-4p^3r+18pqr+p^2q^2-4q^3.$$

1. Выразите через p,q,r следующие выражения: $a^2+b^2+c^2$, $a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2, a^3+b^3+c^3, (ab)^3+(bc)^3+(ca)^3$.

2. Докажите, что $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ действительно расписывается через p,q,r так, как указано выше. Можно воспользоваться наблюдением, что если $x=a^2b+b^2c+c^2a, y=ab^2+bc^2+ca^2$, то $((a-b)(b-c)(c-a))^2=(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$.

3. Докажите, что если a,b,c вещественные, то $a,b,c\geqslant 0 \Leftrightarrow p,q,r\geqslant 0$

4. Вещественные числа a,b,c таковы, что $a+b+c=9, ab+bc+ca=24$. Какие значения может принимать величина abc?

5. q-лемма: если числа a,b,c неотрицательны, $p=p_0, r=r_0$ — фиксированы, то величина q лежит в некотором интервале $[q_{min},q_{max}]$, причем все значения в интервале достигаются. Если же притом $q=q_{min}$ или $q=q_{max}$, то в соответствующей тройке a,b,c некоторые два числа равны.

6. Сформулируйте и докажите p-лемму.

7. Для положительных a,b,c верно, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$1+12abc\geqslant 4(ab+bc+ca).$$

8. Пусть $P(a,b,c)$ — симметрический (но не обязательно однородный) многочлен не более, чем 5-й степени. Пусть также известно, что для любых неотрицательных a,b верны неравенства $P(a,b,0)\geqslant 0$ и $P(a,a,b)\geqslant 0$. Докажите, что для любых неотрицательных a,b,c верно неравенство $P(a,b,c)\geqslant 0$.

10 класс — *pqr*-метод — 14 декабря 2017

Пусть нам задан многочлен с действительными коэффициентами x^3-px^2+qx-r. Тогда его корни a,b,c (такие числа, что $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$) являются вещественными тогда и только тогда, когда дискриминант многочлена третьей степени $T(p,q,r)$ не меньше нуля. Дискриминант при этом выражается в явном виде, как

$$T(p,q,r)=-27r^2-4p^3r+18pqr+p^2q^2-4q^3.$$

1. Выразите через p,q,r следующие выражения: $a^2+b^2+c^2$, $a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2, a^3+b^3+c^3, (ab)^3+(bc)^3+(ca)^3$.

2. Докажите, что $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ действительно расписывается через p,q,r так, как указано выше. Можно воспользоваться наблюдением, что если $x=a^2b+b^2c+c^2a, y=ab^2+bc^2+ca^2$, то $((a-b)(b-c)(c-a))^2=(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$.

3. Докажите, что если a,b,c вещественные, то $a,b,c\geqslant 0 \Leftrightarrow p,q,r\geqslant 0$

4. Вещественные числа a,b,c таковы, что $a+b+c=9, ab+bc+ca=24$. Какие значения может принимать величина abc?

5. q-лемма: если числа a,b,c неотрицательны, $p=p_0, r=r_0$ — фиксированы, то величина q лежит в некотором интервале $[q_{min},q_{max}]$, причем все значения в интервале достигаются. Если же притом $q=q_{min}$ или $q=q_{max}$, то в соответствующей тройке a,b,c некоторые два числа равны.

6. Сформулируйте и докажите p-лемму.

7. Для положительных a,b,c верно, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$1+12abc\geqslant 4(ab+bc+ca).$$

8. Пусть $P(a,b,c)$ — симметрический (но не обязательно однородный) многочлен не более, чем 5-й степени. Пусть также известно, что для любых неотрицательных a,b верны неравенства $P(a,b,0)\geqslant 0$ и $P(a,a,b)\geqslant 0$. Докажите, что для любых неотрицательных a,b,c верно неравенство $P(a,b,c)\geqslant 0$.