10 класс **Линейность — 2** 11 декабря 2017

1. Докажите существование прямой Обера через линейность.

2. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что прямая RC параллельна HP, а RA параллельна HQ. Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

3. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что прямая PQ делит сторону AC пополам.

4. Докажите, что в остроугольном треугольнике можно найти точку, являющуюся центром трёх различных вписанных в треугольник прямоугольников.

5. Обозначим середину дуги ABC описанной окружности треугольника ABC через M. Точки P и Q выбраны на сторонах AB и BC треугольника таким образом, что $PA = QC$. Докажите, что точки B, M, P и Q лежат на одной окружности.

6. Докажите, что прямая, проходящая через основания внешних биссектрис, перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P, а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая A_1C_1 делит отрезок PQ пополам.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка X. Пусть X_{AB}, X_{BC}, X_{CD}, X_{DA}, X_{AC}, X_{BD} — проекции точки X на прямые AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.

10 класс **Линейность — 2** 11 декабря 2017

1. Докажите существование прямой Обера через линейность.

2. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что прямая RC параллельна HP, а RA параллельна HQ. Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

3. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что прямая PQ делит сторону AC пополам.

4. Докажите, что в остроугольном треугольнике можно найти точку, являющуюся центром трёх различных вписанных в треугольник прямоугольников.

5. Обозначим середину дуги ABC описанной окружности треугольника ABC через M. Точки P и Q выбраны на сторонах AB и BC треугольника таким образом, что $PA = QC$. Докажите, что точки B, M, P и Q лежат на одной окружности.

6. Докажите, что прямая, проходящая через основания внешних биссектрис, перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P, а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая A_1C_1 делит отрезок PQ пополам.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка X. Пусть X_{AB}, X_{BC}, X_{CD}, X_{DA}, X_{AC}, X_{BD} — проекции точки X на прямые AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.