

Определение. Функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C , делящей прямую AB в отношении $a : b$, выполнено равенство $f(C) = \frac{b}{a+b}f(A) + \frac{a}{a+b}f(B)$.

Определение. Функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости выполнено равенство $f((x, y)) = ax + by + c$.

Определение. Скажем, что объект движется *линейно*, если существует такой вектор \vec{v} , что за время t объект сдвигается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

0. а) Точки A и B двигаются линейно. Докажите, что середина отрезка AB тоже двигается линейно.

б) Точка C линейно двигается по лучу AC . Докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан треугольника ABC двигаются линейно (точка B покоится на месте).

в) Три прямые двигаются линейно. Сколько требуется моментов времени, в которые они должны пересечься в одной точке, чтобы утверждать, что они всегда пересекаются в одной точке?

г) Точка A покоится на месте, а точки B и C двигаются линейно и параллельно друг другу. Сколько требуется моментов времени, в которые они должны лежать на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой?

1. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN . На стороне AB выбрана точка P , а на сторонах AC и BC выбраны точки L и K такие, что PL параллельно BN , а PK параллельно AM . Докажите, что отрезок LK делится медианами на три равные части.

3. Внутри треугольника ABC расположен треугольник PQR . Известно, что сумма расстояний от вершины треугольника PQR до сто-

рон треугольника ABC не зависит от выбора вершины треугольника PQR . Докажите, что треугольник ABC — правильный.

4. а) Докажите существование прямой Гаусса через движение прямой.

б) Докажите, что для почти любого четырехугольника $ABCD$ ГМТ точек P таких, что сумма ориентированных площадей треугольников ABP и CDP равна сумме ориентированных площадей треугольников BSP и DAP , есть прямая. Когда это неверно? Докажите еще раз существование прямой Гаусса.

в) Докажите, что если четырехугольник описанный, то центр его вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.

5. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Получилось так, что три пары внешних биссектрис: при вершинах A и C , при вершинах B и D и при вершинах P и Q имеют точки пересечения. Докажите, что они лежат на одной прямой.

6. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами провели прямые, параллельные биссектрисам соответственных углов. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

7. а) Из линейности площади найдите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

б) Решите пункт 0г) в случае, когда все три точки двигаются линейно в произвольных направлениях.

8. H — ортоцентр треугольника ABC . Точка P движется по описанной окружности треугольника ABH . Пусть A' и B' — точки пересечения прямых AP и BP с противоположными сторонами треугольника ABC . Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.