10 класс Однородность и Мюрхед 23 ноября 2017

1. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите частный случай неравенства Мюрхеда

$$a^5+b^5+c^5 \geqslant \frac{1}{2}(a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+c^3a^2+c^2a^3).$$

2. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt[2]{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

3. (Беларусь 2011) Положительные a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$a+b+c \geqslant ab+bc+ca.$$

4. (Санкт-Петербург 2010) Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c.$$

5. (Санкт-Петербург 2010) Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=ab+bc+ca$. Докажите неравенство

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc.$$

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $(a^3+b^3)^4=c^3+d^3$. Докажите неравенство

$$a^4c+b^4d \geqslant cd.$$

7. (IMO shortlist 2009) Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

10 класс Однородность и Мюрхед 23 ноября 2017

1. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите частный случай неравенства Мюрхеда

$$a^5+b^5+c^5 \geqslant \frac{1}{2}(a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+c^3a^2+c^2a^3).$$

2. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt[2]{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

3. (Беларусь 2011) Положительные a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$a+b+c \geqslant ab+bc+ca.$$

4. (Санкт-Петербург 2010) Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c.$$

5. (Санкт-Петербург 2010) Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=ab+bc+ca$. Докажите неравенство

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc.$$

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $(a^3+b^3)^4=c^3+d^3$. Докажите неравенство

$$a^4c+b^4d \geqslant cd.$$

7. (IMO shortlist 2009) Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$